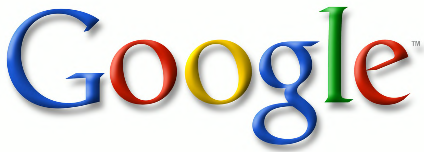


100 Aufgaben

aus der

niederen Geometrie

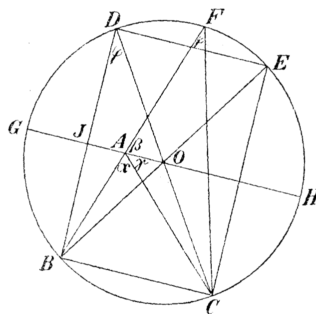
nebst vollständigen Lösungen.

Mit 104 Abbildungen.

Von

Dr. Karl Schwering,

Oberlehrer und Professor.



Freiburg im Breisgau.

Herdersche Verlagshandlung.

1891.

Zweigniederlassungen in *Strassburg, München* und *St. Louis,* Mo.

Wien I, Wollzeile 33: B. Herder, Verlag.

Buchdruckerei der Herderschen Verlagshandlung in Freiburg.

Vorwort.

Vorliegendes Buch ist für die drei oberen Klassen unserer höheren Lehranstalten bestimmt. Es soll zum Führer bei einer vollständigen Wiederholung des ganzen Lehrstoffs, besonders auf oberster Stufe und vor der Abgangsprüfung gewählt werden können. Die dürre Langeweile des Lernens, Vergessens, Wiederlernens und Wiedervergessens der Sätze, häufig mit einem traurigen Halbwissen abschliefsend, soll nicht nur vermieden, sondern sie soll durch etwas Angenehmes ersetzt werden, durch die erfreuende Thätigkeit selbständigen Denkens und des Umsetzens von Wissen in Können.

Es hat verhältnismäfsig lange gedauert, bis die Überzeugung von der Wichtigkeit des Aufgabenlösens für den mathematischen Unterricht sich allgemeine Geltung verschaffte. Gegenwärtig begegnet die Behauptung, dafs Lösung von Aufgaben Ziel und Zweck der mathematischen Ausbildung sei, keinem ernsten Widerspruche mehr. Die Zahl der Aufgabensammlungen, und zwar der brauchbaren, ist dementsprechend nicht klein.

Das vorliegende Buch zeigt einen vom Herkommen abweichenden Plan. Es enthält eine nur geringe Zahl Aufgaben; aber die Lösungen sind nicht blofs angedeutet, sondern erschöpfend durchgeführt. Dabei ist in bewufstem Gegensatze zur herkömmlichen Breite nicht nach dem steifen Rahmen Analysis — Konstruktion — Beweis — Determination gearbeitet, sondern nur erstrebt worden, dafs die gegebene Lösung streng richtig und die Richtigkeit überzeugend dargethan sei. Bezüglich der Determination ist festzuhalten, dafs klare Einsicht in die Möglichkeitsbedingungen einer Lösung durch Aufzeigung der Grenze häufig von hohem wissenschaftlichen Reize, aber leider gleichzeitig für den mittelbegabten Anfänger zu abstrakt ist. Für Gymnasien sind daher bezüglich

der Aufgaben 47, 48, 50 Kürzungen zulässig. Übrigens haben die Grenzbetrachtungen, wo es anging, durch Maximalaufgaben den Charakter unfruchtbarer Verneinung abgelegt.

Den gelösten Aufgaben sind die zur Lösung führenden Sätze in vollem Wortlaute beigefügt. Ich hoffe dadurch zu erreichen, dafs diese Sammlung zu jedem Lehrbuche gebraucht werden kann. Legt man grofses Gewicht darauf, dafs die Sätze in einer genau bestimmten Fassung dem Gedächtnisse anvertraut werden, so kann man ja dem Schüler aufgeben, sich die Sätze nicht in der Fassung der Sammlung, sondern in der des Lehrbuches zu merken. Übrigens scheint es mir doch nicht Hauptsache zu sein, dafs die Schüler gerade in einer bestimmten Fassung die Sätze auswendig hersagen können.

Die Wahl der Aufgaben ist nach den Grundsätzen erfolgt: Der zur Lösung führende Gedanke soll an jeder Aufgabe klar hervortreten; die Schwierigkeit soll ein gewisses Mittelmafs nicht überschreiten, aber auch erreichen; der Lösungsgedanke soll für andere Aufgaben fruchtbar sein. Die Aufgaben sollen womöglich praktischen oder wissenschaftlichen Hintergrund haben; Künsteleien sind streng zu meiden.

Bezüglich der Anordnung ist ein gewisser natürlicher Zusammenhang und eine Reihenfolge nach Lösungsmethoden angestrebt worden. Dagegen habe ich mich nicht entschliefsen können, den Mafsstab der gröfseren Schwierigkeit jedesmal bezüglich der Entscheidung in dieser Hinsicht anzulegen. Es macht dem Lernenden Freude, nach schwierigeren Aufgaben auch einmal einer leichteren zu begegnen. Ich habe besonders gegen Ende jedes der beiden Teile derartige Aufgaben eingelegt.

Wie man längst durch Musteraufsätze und Musterübersetzungen zusammenhängender Lesestücke dem Erlernen der Sprachen ein willkommenes Hülfsmittel dargeboten hat, so glaubt der Verfasser für die Erleichterung des Eindringens in die Raumlehre hoffentlich vielen einen Dienst durch vorliegendes Buch zu erweisen. Zwei Dinge sind verhängnisvoll für jeden Lernfortschritt: Langeweile und Schwierigkeiten, welche nicht durch die Sache auferlegt werden. Möge es dem Verfasser gelungen sein, an der Hinwegräumung dieser Steine von der schönen Strafse mit Erfolg gearbeitet zu haben, die zur Geometrie führt. Auch für diese Strafse gilt das alte Wort: *Longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.*

Coesfeld, im März 1891.

Karl Schwering.

Inhalt.

Erster Teil.

Zweiter Teil.

Anhang.

Berichtigungen.

S. 16, Z. 4 v. u. lies $2\,DB^2$ statt DB^2.
S. 16, Fig. 16b ist die Ecke des Dreiecks mit C statt E zu bezeichnen.
S. 28 in Aufgabe 20 ergänze nach d: des Mittelpunktes.
S. 100, Z. 4 v. u. lies Menelaus statt Ceva.
S. 130, Z. 18 fehlt der Faktor π.

Erster Teil.

Aufgaben aus der Planimetrie.

1.

Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus gesehen zwei Kreise gleich grofs erscheinen. Bestimmung durch Angabe des geometrischen Ortes.

Es sei C ein solcher Punkt. Wir verbinden ihn mit A und B, den Mittelpunkten der gegebenen Kreise, und ziehen die Tangenten CD und CE. Dann sind die Winkel DCA und ECB die halben Sehwinkel; denn:

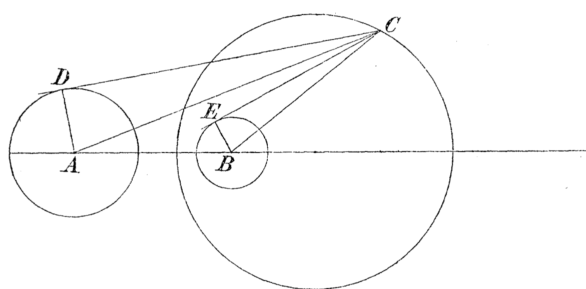


Fig. 1.

Verbindet man den Schnittpunkt zweier Tangenten mit dem Mittelpunkte des Kreises, so halbiert die Verbindungslinie den von den Tangenten gebildeten Winkel.

Die Dreiecke DCA und ECB sind rechtwinklig bei D und E; denn:

Jede Tangente eines Kreises steht senkrecht auf dem Radius im Berührungspunkte.

Diese Dreiecke sind nun ähnlich; denn:

Zwei Dreiecke, welche in zwei Winkeln übereinstimmen, sind ähnlich.

Also verhält sich $AC : CB = AD : EB$. Da die Radien und die Centrale der Kreise bekannt sind, so ist der Punkt C dadurch näher bestimmt. Er liegt auf dem Apollonischen Kreise, den wir jetzt näher zu untersuchen haben.

2.

Eine gegebene Strecke a soll im Verhältnisse von m zu n nach innen und aussen geteilt werden.

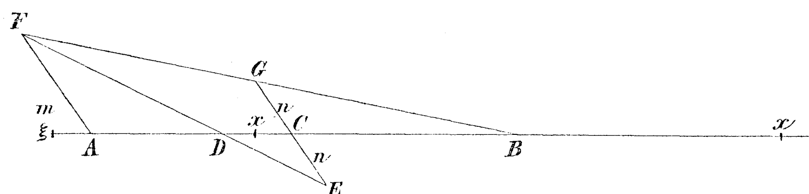


Fig. 2.

$AC = a$, $AF = m$, $GC = CE = n$, $AF \parallel GC$. Die Punkte D und B lösen die Aufgabe. Denn Dreieck $FDA \sim EDC$, $BCG \sim BAF$. Die beiden Verhältnisse

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{m}{n}$$

wollen wir Teilverhältnisse nennen und uns gewöhnen, immer mit dem Teilpunkte zu beginnen: also DA, nicht AD; BC, nicht CB.

Es giebt für das gegebene Verhältnis $m:n$ nur einen innern und auch nur einen äufsern Teilpunkt.

Um dies einzusehen, lassen wir einen Punkt x die unendlich lange Gerade AC durchwandern.

Befindet sich x in obiger Figur rechts von B, so ist nicht

$$\frac{xA}{xC} = \frac{BA}{BC},$$

denn daraus würde folgen:

$$\frac{xA}{xA - xC} = \frac{BA}{BA - BC}, \text{ oder } \frac{xA}{AC} = \frac{BA}{AC}$$

oder ein Teil BA gleich dem ganzen xA, w. u. i.

Wir haben hier den Satz angewandt:

In einer richtigen Proportion verhält sich das erste Glied zur Differenz des ersten und zweiten wie das dritte Glied zur Differenz des dritten und vierten.

Ebenso zeigt man, dafs x nicht zwischen B und C liegen kann. Es kann x auch nicht zwischen A und C liegen. Denn wäre $xA : xC = m : n = DA : DC$, so wäre nach Umstellung der Mittelglieder

$$\frac{xA}{DA} = \frac{xC}{DC},$$

also ein unechter Bruch gleich einem echten, w. u. i.

Noch weniger kann x links von A liegen. Denn

$$\frac{DA}{DC} = \frac{m}{n} = \frac{BA}{BC}$$

sind unechte Brüche, da $BA > BC$; $\frac{\xi A}{\xi C}$ wäre aber ein echter Bruch.

Es ist also gezeigt, dafs das Verhältnis $\frac{m}{n}$ nur einmal zwischen A und C, nämlich in D, und auch nur einmal aufserhalb der Strecke AC, nämlich auf der Geraden im Punkte B angetroffen wird.

Die vier Punkte A, C; B, D heifsen harmonische Punkte, und zwar A, C das eine Paar, B, D das andere Paar zugeordneter harmonischer Punkte.

In unserer obigen Konstruktion findet sich eine Willkür. Die Richtung von AF ist unbestimmt. Zieht man durch A nach allen möglichen Richtungen Gerade und trägt auf denselben die gleiche Strecke m von A aus ab, so erhält man die Punkte eines um A mit der Strecke m als Radius beschriebenen Kreises. Ebenso entsteht um C ein Kreis mit dem Radius n. Folglich können wir jetzt unserer obigen Konstruktion folgende Form geben:

Man beschreibe um den einen Endpunkt A der zu teilenden Strecke mit einem Radius m, um den andern C mit einem Radius n Kreise, ziehe zwei parallele Durchmesser und verbinde in geeigneter Weise die Endpunkte der Durchmesser.

Die so bestimmten Teilpunkte heifsen der äufsere und der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

3.

An zwei gegebene Kreise soll eine gemeinschaftliche Tangente gezogen werden.

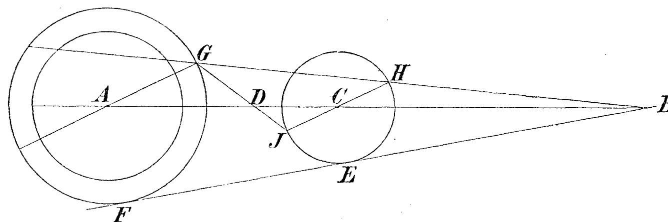


Fig. 3.

Lösung. In Fig. 3 ist $AG \parallel CH$, also nach dem Vorigen B äufserer, D innerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Von B aus ist an den Kreis um C die Tangente BE gelegt. Sie löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist zu zeigen, daſs die Gerade BE auch den Kreis um A berührt. Man fälle von A aus auf die Gerade BE eine Senkrechte AF. Dann entsteht über C von B zu A eine Brücke. Es verhält sich einerseits

$$BC : BA = CH : AG$$

und andrerseits

$$BC : BA = CE : AF.$$

Nach dem Grundsatze:

Was demselben Dritten gleich ist, das ist auch unter sich gleich,

haben wir also $CH : AG = CE : AF,$

oder nach Vertauschung der Mittelglieder:

$$CH : CE = AG : AF = 1 : 1;$$
$$AG = AF.$$

Folglich ist F ein Punkt des Kreises, AF ein Radius und BE Tangente auch dieses Kreises; denn:

Steht eine gerade Linie auf dem Radius eines Kreises in seinem Endpunkte auf der Peripherie senkrecht, so ist sie Tangente des Kreises.

Durch den Punkt D wird ebenso eine innere gemeinsame Tangente geliefert wie durch den Punkt B eine äuſsere.

Einschränkung. Zwei Kreise können zu einander überhaupt drei Hauptlagen und zwei Grenzlagen zeigen. Sie sind hier der Reihe nach dargestellt.

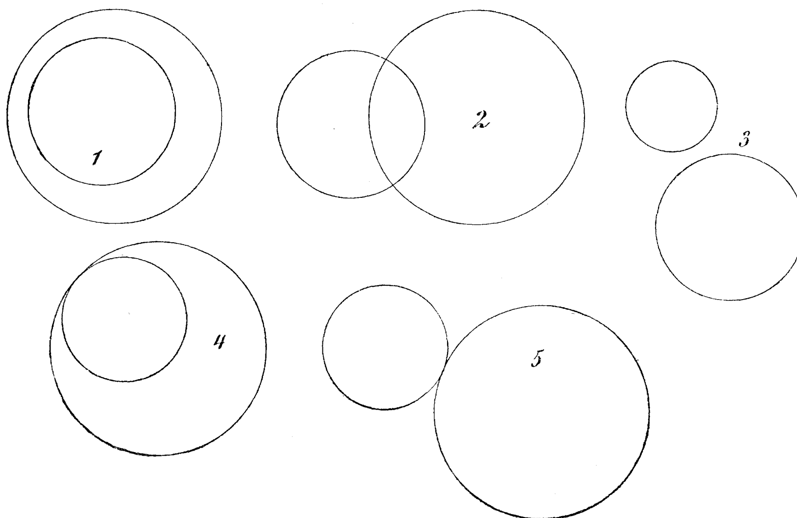


Fig. 4.

Im Falle 1 erhalten wir keine, im Falle 2 zwei, im Falle 3 vier Lösungen; 4 bildet mit einer Lösung den Übergang von 1 zu 2, und 5 mit drei Lösungen den Übergang von 2 zu 3.

4.

Ein Dreieck zu konstruieren aus a, $b : c = m : n$, h_a.

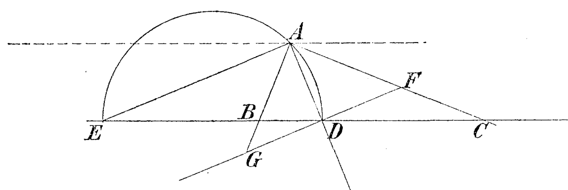


Fig. 5.

Lösung. Die gegebene Strecke $BC = a$ ist in den Punkten D und E nach dem Verhältnisse $m : n$ geteilt. Über DE als Durchmesser ist ein Halbkreis beschrieben und zu BC im Abstande h_a eine Parallele gezogen. Sie trifft den Halbkreis im Punkte A, und ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $AB : AC = m : n$; denn die übrigen beiden Forderungen der Aufgabe sind durch die Zeichnung unmittelbar erfüllt worden. Da $DB : DC = m : n$, so würde auch $AB : AC = m : n$ sein, wenn AD den Winkel BAC halbierte; denn:

Der Winkelhalbierer teilt die Gegenseite so, dafs sich die Teilstücke verhalten wie die anliegenden Dreiecksseiten.

Wir ziehen durch D die Linie $GF \parallel AE$, welche zu AD senkrecht steht; denn:

Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Nun verhält sich

$$DC : EC = DF : EA; \; DB : EB = DG : AE,$$

da $FG \parallel AE$ ist. Andrerseits haben wir:

$$DB : DC = EB : EC = m : n,$$

also auch nach Umstellung der Mittelglieder:

$$DB : EB = DC : EC.$$

Folglich sind die linken Seiten der zuerst aufgeschriebenen Verhältnisgleichungen einander gleich, mithin auch die rechten. Man hat also nach Umstellung der Mittelglieder:

$$DF : DG = AE : AE = 1 : 1.$$

Nun ist Dreieck $ADG \cong ADF$, also AD Winkelhalbierer und die Richtigkeit unserer Konstruktion bewiesen.

Einschränkung. Die Lösung wird unmöglich, wenn die im Abstande h_a gezogene Parallele den Hülfskreis (Apollonischen Kreis) nicht schneidet. Im allgemeinen erhält man zwei Auflösungen.

Anmerkung. AD ist äufserer Winkelhalbierer, E, D; B, C sind harmonische Punktepaare. Vgl. Aufg. 1.

5.

Gegeben drei Punkte auf einer Geraden A, B, C. Man suche auf derselben einen Punkt D, so dafs A, B; C, D harmonische Punktepaare werden, und zwar unter alleiniger Anwendung des Lineals.

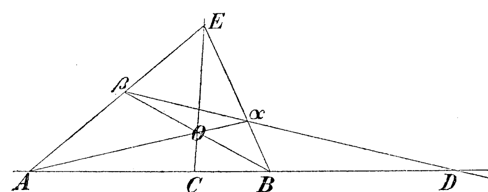


Fig. 6.

Lösung. Man wähle Punkt E beliebig, ziehe EA, EB, EC. Auf EC ist O beliebig gewählt und mit A und B verbunden. Die hierdurch gegebenen Schnittpunkte α, β liegen in gerader Linie mit D.

Beweis. Nach dem Satze des Ceva ist:

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1.$$

Nach dem Satze des Menelaus ist:

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha D} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1.$$

Folglich $CA : CB = DA : DB$, w. z. b. w.

Die beiden vorhin erwähnten Sätze lassen sich folgendermafsen einfach aussprechen und beweisen.

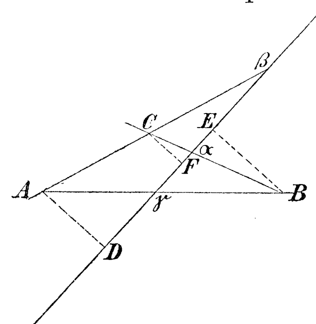


Fig. 7.

Satz des Menelaus. Trifft eine Gerade zwei Seiten eines Dreiecks und eine Verlängerung oder die drei Verlängerungen, so ist das Produkt aus den Teilverhältnissen, richtig gelesen, gleich eins.

Um die Teilverhältnisse richtig zu lesen, bezeichnen wir die Teilpunkte auf den A, B, C gegenüberliegenden

Dreiecksseiten bezw. Verlängerungen mit α, β, γ. Dann greifen wir einen Teilpunkt heraus, etwa α, und bilden das auf der betreffenden Seite vorhandene Teilverhältnis $\frac{\alpha B}{\alpha C}$. Hiermit ist im Nenner der Punkt C erreicht, welcher in keinem weitern Teilverhältnisse vorkommt als in $\frac{\beta C}{\beta A}$. Nun ist im Nenner der Punkt A erreicht, welcher zu dem Teilverhältnisse $\frac{\gamma A}{\gamma B}$ führt. Wir erhalten so das richtig gelesene Produkt:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B}.$$

Durch Ähnlichkeit der Dreiecke ergiebt sich nun, wenn man von A, B, C auf die Transversale α, β, γ die Senkrechten fällt:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{BE}{CF}; \ \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{CF}{AD}; \ \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{AD}{BE}.$$

Durch Multiplikation findet man:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{BE \cdot CF \cdot AD}{CF \cdot AD \cdot BE} = 1.$$

Und damit ist der Satz bewiesen.

Um den Satz des Ceva zu beweisen, schicken wir den Hülfssatz voraus:

Stehen zwei Dreiecke über derselben Grundlinie, so trifft die Verbindungslinie der Spitzen die Grundlinie in einem solchen Punkte, dafs das auf der Verbindungslinie entstehende Teilverhältnis dem Verhältnisse der Inhalte gleich ist.

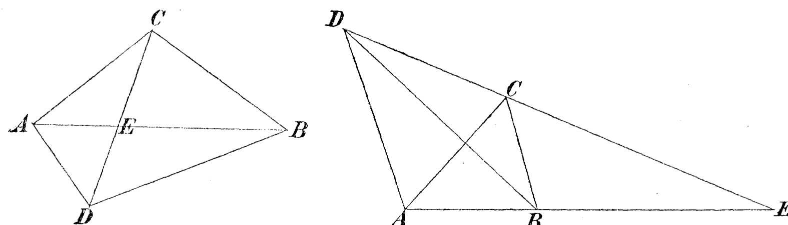


Fig. 8.

Ist die Grundlinie eines Dreiecks g, die Höhe h, so wird sein Inhalt gegeben durch die Formel $I = \frac{1}{2}\, gh$. Die Inhalte zweier Dreiecke mit gleicher Grundlinie verhalten sich also wie die zugehörigen Höhen: die Dreiecke DAB und CAB verhalten sich inhaltlich wie die von D und C auf die Gerade AB gefällten Senkrechten, also mit Hülfe ähnlicher Dreiecke wie $ED : EC$.

Satz des Ceva. Wenn drei Ecktransversalen sich in einem Punkte schneiden, so treffen dieselben entweder die drei Gegenseiten des Dreiecks oder eine Gegenseite und die Verlängerungen der beiden andern. Der erste Fall tritt ein, wenn der Schnittpunkt im Innern des Dreiecks liegt, der zweite, wenn er aufserhalb der Dreiecksfläche liegt. In beiden Fällen ist das Produkt der Teilverhältnisse gleich eins.

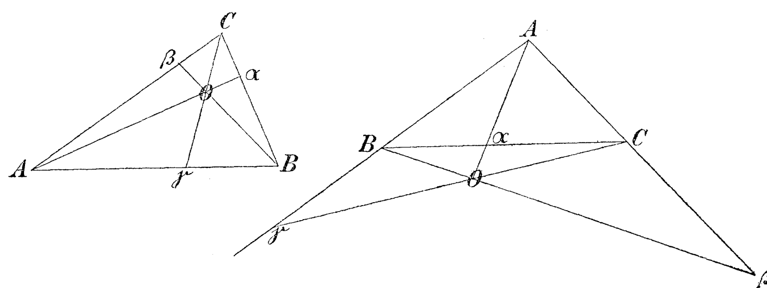


Fig. 9.

Deuten wir die Inhalte der Dreiecke durch Überstreichen an und setzen:

$$\overline{AOC} = I_2,\ \overline{AOB} = I_3,\ \overline{BOC} = I_1,$$

so wird

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{I_2}{I_1},\ \frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{I_3}{I_2},\ \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{I_1}{I_3}$$

und folglich

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} = 1.$$

Beide Sätze lassen sich umkehren. Die Beweise dieser Umkehrungen sind einander sehr ähnlich. Wir wollen hier nur den einen der vier Umkehrungssätze, nämlich den ersten Fall der Umkehrung des Cevaschen Satzes, vortragen. Er lautet:

Sind auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Teilpunkte α, β, γ so gegeben, dafs das Produkt ihrer Teilverhältnisse gleich eins ist, so schneiden sich die drei Ecktransversalen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in einem Punkte.

Beweis. Zwei der Ecktransversalen, $A\alpha$ und $B\beta$, schneiden sich in einem Punkte O. Verbinden wir O mit C, so wird die Verlängerung, weil O im Innern des Dreiecks liegt, die Seite AB in irgend einem Punkte treffen, und nicht die Verlängerung von AB. Der Treffpunkt ist γ. Angenommen der Treffpunkt sei nicht γ, sondern δ; dann ist nach dem Satze des Ceva:

$$\frac{\delta A}{\delta B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} = 1.$$

Nach Voraussetzung ist:

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} = 1.$$

Folglich müfste sein:

$$\frac{\delta A}{\delta B} = \frac{\gamma A}{\gamma B}, \text{ w. u. i. Vgl. Aufg. 2.}$$

6.

Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten Seite gehörigen Mittellinie (b, c, t_a).

Wenn man die Mittellinie über die Seitenmitte hinaus um sich selbst verlängert, so entsteht ein Parallelogramm; denn:

In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig. Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen gegenseitig, so ist es ein Parallelogramm.

Daher ist es zur Auffindung der Lösung bei Aufgaben, welche Mittellinien enthalten, fast immer zweckmäfsig, die Mittellinien über die Seitenmitte hinaus um sich selbst zu verlängern.

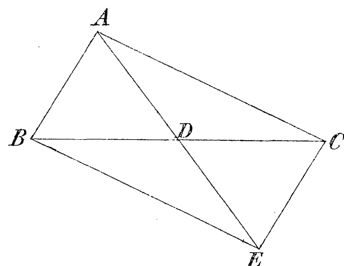


Fig. 10.

Lösung. Man beschreibe um A mit der Strecke b als Radius einen Kreis, mache $AD = DE = t_a$, beschreibe um E mit c einen Kreis, welcher den vorigen in C treffen möge. Alsdann ziehe man DC, mache $BD = DC$, und Dreieck ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dafs $AB = c$. Dies ist der Fall, weil $ABCE$ ein Parallelogramm und darum $AB = CE = c$ ist.

In einem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich und umgekehrt.

Einschränkung. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn aus den drei Stücken $2t_a$, b, c als Seiten sich kein Dreieck herstellen läfst.

Unsere Aufgabe läfst auch eine rechnerische (algebraische) Lösung zu. Wir suchen zu diesem Zwecke nach Beziehungen zwischen den Seiten des Dreiecks und seinen Mittellinien. Diese

Beziehungen liefert am einfachsten der Cosinussatz. In einem rechtwinkligen Dreiecke nennt man den Quotienten der Gegenkathete durch die Hypotenuse den *sinus*, den Quotienten der anliegenden Kathete durch die Hypotenuse den *cosinus* des betreffenden spitzen Winkels.

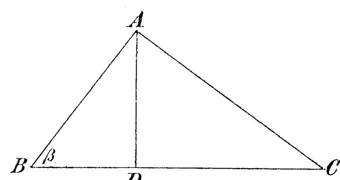


Fig. 11.

Es ist also $\sin\beta = \frac{AD}{AB}$, $\cos\beta = \frac{BD}{AB}$.

Wenn man quadriert und addiert*, so erhält man einen Hauptsatz der Trigonometrie:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1;$$

denn:

Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Setzen wir $BD = x$, so dürfen wir setzen $DC = a - x$. Nennen wir noch die Höhe $AD = h$, so finden wir die Doppelgleichung:

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 = b^2 - (a^2 - 2ax + x^2).$$

Daraus folgt nach der algebraischen Zeichenregel:

Beim Klammerauflösen und Multiplizieren giebt das Zusammentreffen gleicher Vorzeichen plus, ungleicher minus,

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2.$$

Addieren wir beiderseits x^2, ferner a^2, subtrahieren beiderseits b^2 und dividieren beide Seiten der so entstandenen Gleichung durch $2a$, so folgt

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

nach dem Grundsatze:

Gleiches gleich behandelt giebt Gleiches.

Dividieren wir jetzt noch durch $BA = c$, und zwar in Befolgung der Bruchregel:

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert,

so folgt

$$\cos\beta = \frac{x}{c} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \quad \text{(A)}$$

* Beispiel einer Wiederholung aus der Algebra.

Dieser Satz gilt zunächst nur, wenn β ein spitzer Winkel ist. Die trigonometrischen Funktionen *sin* und *cos* haben nach unserer obigen Erklärung auch nur für spitze Winkel Sinn. *Sin* und *cos* stumpfer Winkel könnten wir als unsinnig verwerfen. Aber wir würden dann genötigt sein, jede durchgeführte Rechnung noch einmal durchzugehen und zu untersuchen, ob vielleicht einer der vorkommenden Winkel stumpf ist. Würde sich ein solcher Winkel finden, so müfsten wir unsere Rechnung als sinnlos und darum als ungültig bezeichnen. Diesen Unbequemlichkeiten gehen wir dadurch aus dem Wege, dafs wir den trigonometrischen Funktionen stumpfer Winkel auch eine Bedeutung beilegen. Hierbei dürfen wir aber nicht willkürlich verfahren. Wir müssen den Funktionen stumpfer Winkel solche Werte beilegen, dafs die Regeln gültig bleiben, welche wir für spitze Winkel als gültig erkannt haben. Den *cosinus* eines stumpfen Winkels β erklären wir also als denjenigen Wert, den ihm Gleichung (A) beilegt. Sehen wir uns jetzt nach der nähern Bestimmung dieses Wertes um.

Wir setzen $DB = x$, also $DC = a + x$, $AD = h$. Dann wird

$$h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a + x)^2.$$

Daraus folgt

$$x = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a}; \quad cos\ (180^0 - \beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}.$$

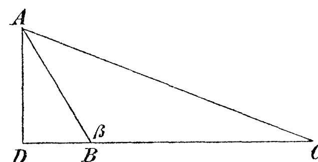


Fig. 12.

Wir finden also

$$cos\ (180 - \beta) = - cos\beta.$$

Wir denken uns hier die Winkel nach Gradmafs gemessen. Dies ist ein künstliches Mafs. Beschreiben wir um den Scheitel des Winkels mit einem Radius eins einen Kreis, so nennt man das zwischen den Schenkeln des Winkels liegende Stück des Kreisbogens den Arcus des Winkels: $arc\beta$. Dieser Arcus ist das natürliche Mafs des Winkels. Für 180^0 ist der $arc\ 180 = \pi$, weshalb obige Gleichung, wenn auch β in natürlichem Mafs gemessen ist, lautet:

$$cos\ (\pi - x) = - cos x, \quad x = arc\beta^0.$$

In der elementaren Trigonometrie bedient man sich fast immer des künstlichen Mafses.

Für den *sinus* erhält man aus Figur 11 sofort

$$h = c\, sin\beta = b\, sin\gamma, \text{ oder}$$
$$b : c = sin\beta : sin\gamma. \quad \text{(B)}$$

Dies ist der Sinussatz. Er ist für spitze Winkel abgeleitet. Den *sinus* eines stumpfen Winkels erklären wir nun als denjenigen Wert, welcher der Gleichung (B) genügt, wenn γ spitz und β stumpf ist. Nun liefert Fig. 12

$$h = c \sin(180 - \beta) = b \sin\gamma.$$

Folglich ist

$$\sin(180 - \beta) = \sin\beta.$$

Kehren wir nach diesen Auseinandersetzungen zu unserer Aufgabe zurück.

Wenden wir den Cosinussatz auf das Dreieck ABC (Fig. 10) an, so folgt

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Wenden wir denselben Satz auf Dreieck ABD an, so folgt

$$\cos\beta = \frac{\frac{a^2}{4} + c^2 - t_a^2}{ac}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$4t_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2.$$

In dieser Form prägt sich der Satz leicht dem Gedächtnisse ein. Denn er sagt aus (Fig. 10):

In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen.

Die Zeichnung der Strecke a, der dritten Dreiecksseite, gelingt nach folgender Übersicht:

$$b^2 + c^2 = \alpha^2;\ 2\alpha^2 = \beta^2;\ a^2 = \beta^2 - 4t_a^2.$$

Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten b, c. Die Hypotenuse nennen wir α. Ein zweites mit den gleichen Katheten α, α liefert die Hypotenuse β. Ein drittes mit der Hypotenuse β und einer Kathete $2t_a$ liefert als andere Kathete a.

7.

Ein Dreieck zu zeichnen aus den drei Mittellinien.

Zwei Mittellinien schneiden sich immer derartig, dafs das der Ecke zugewandte Stück doppelt so grofs ist als das der Seitenmitte zugewandte. Die drei Mittellinien schneiden sich in einem Punkte, dem

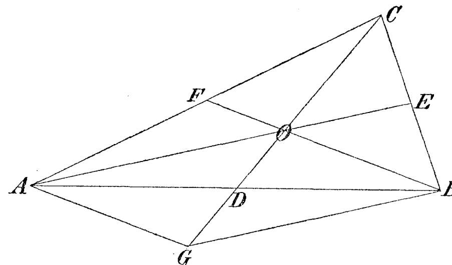


Fig. 13.

Schwerpunkte der Dreiecksfläche. Beachten wir nun den zu Anfang von Aufgabe 6 erwähnten Kunstgriff, so ergiebt sich folgende Lösung:

Das Dreieck OGB ist aus seinen drei Seiten konstruiert; $OG = \frac{2}{3}t_c$, $OB = \frac{2}{3}t_b$; $BG = \frac{2}{3}t_a$. Hierauf ist $OD = DG$, $BD = DA$ und $OC = \frac{2}{3}t_c = 2OD$ gemacht. ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs BO die Mitte von AC, AO die Mitte von BC trifft und $AE = t_a$, $BF = t_b$ ist. Wir führen den Beweis am leichtesten indirekt. Wenn E nicht die Mitte von BC wäre, so sei E' diese Mitte. Wir verbinden E' mit A, dann schneidet die Mittellinie AE' die Mittellinie CD dem oben erwähnten Satze gemäfs so in O', dafs $DO' = \frac{1}{3}DC$ wird. Nun ist aber nach unserer Zeichnung $DO = \frac{1}{3}DC$, also $DO = DO'$, ein Teil gleich dem Ganzen, w. u. i. Es ist also AE Mittellinie, folglich $AO = 2OE = BG = \frac{2}{3}t_a$. Mithin ist $OE = \frac{1}{3}t_a$ und $AE = \frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_a = t_a$. — Ebenso zeigt man, dafs BF Mittellinie ist und die vorgeschriebene Gröfse t_b hat.

Einschränkung. Die Lösung wird unmöglich, wenn aus den drei Mittellinien als Seiten kein Dreieck hergestellt werden kann; denn alsdann gelingt die Zeichnung des Dreiecks OBG nicht.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen im Verhältnisse ihrer drei Seiten.

Unsere Aufgabe läfst auch eine schöne algebraische Lösung zu. Wir haben die drei Gleichungen:

$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$
$$4t_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$
$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Dieselben gehen durch cyklische Vertauschung jede aus der vorhergehenden hervor. Durch Addition folgt:

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \;.\;.\;. \text{(A)}$$

Zieht man nun aus der ersten der obigen Gleichungen

$$b^2 + c^2 = \frac{4t_a^2 + a^2}{2},$$

so erhält man durch Einsetzung dieses Wertes in (A) nach leichter Rechnung:

$$9a^2 = 8t_b^2 + 8t_c^2 - 4t_a^2.$$

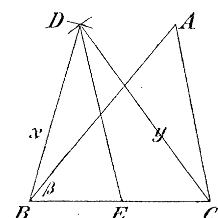
Diese Gleichung löst die Aufgabe und führt sogar auf die geometrische Lösung zurück. Man braucht nur im Dreiecke OBG die Mittellinie DB durch die Seiten auszudrücken.

8.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, β, $b^2 + c^2 = s^2$.

In dem Ausdrucke $4t_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$ kommt die Summe $b^2 + c^2$ so vor, dafs durch a und $b^2 + c^2 = s^2$ auch t_a gegeben ist.

Lösung. Über s als Durchmesser ist ein Halbkreis beschrieben. Ein beliebiger Punkt des Halbkreises ist mit den Endpunkten des Durchmessers verbunden. So wird $x^2 + y^2 = s^2$. Jetzt sind um B und C, die Endpunkte der Strecke a, mit den Strecken x, y als Radien Kreise beschrieben, welche sich im Punkte D schneiden. E ist die Mitte von BC. Der um E mit DE beschriebene Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels β im Punkte A. ABC löst die Aufgabe.



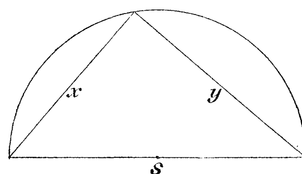


Fig. 14.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dafs $AB^2 + AC^2 = s^2$. Man hat vermöge eines Satzes (s. Aufg. 6) in Bezug auf Dreieck DBC und ABC:

$$4DE^2 + a^2 = 2(x^2 + y^2);$$
$$4AE^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

Folglich ist

$$b^2 + c^2 = x^2 + y^2 = s^2.$$

Einschränkung. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn $2s^2 < a^2$. Ferner mufs aber auch DE gröfser sein als der Abstand des Punktes E vom freien Schenkel des Winkels β. Dann finden zwei eigentliche Lösungen statt. Ist $DE \geqq \frac{a}{2}$, so findet man nur eine eigentliche Lösung. Dies entspricht der Bestimmung $s \geqq a$.

9.

Gegeben eine Gerade und zwei Punkte B, C. Man soll auf der Geraden einen Punkt A von der Beschaffenheit finden, dafs die Summe der Quadrate der Abstände von den festen Punkten B und C ein Minimum sei.

Maximal- und Minimal-Aufgaben können in der Geometrie häufig folgendermafsen gelöst werden. Man ersetzt in der Aufgabe den Begriff „Maximum“ oder „Minimum“ durch den Begriff „vorgeschriebene, gegebene Gröfse“. Alsdann löst man die entstandene Aufgabe. In der Einschränkung findet man einen Grenzfall; man findet, dafs die „vorgeschriebene“ Gröfse eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf (oder erreichen mufs), wenn die Aufgabe lösbar bleiben soll. Dieser Grenzfall liefert also das Maximum oder Minimum.

In unserer Aufgabe haben wir hiernach folgende Voraufgabe zu lösen:

Auf einer gegebenen Geraden soll ein Punkt A so bestimmt werden, dafs die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei festen Punkten B, C einer gegebenen Gröfse s^2 gleich wird. Die vorige Aufgabe hat uns gelehrt, dafs die Mittellinie des Dreiecks ABC bekannt ist. Die Aufgabe wird also unmöglich, wenn der mit der Mittellinie beschriebene Kreis die gegebene Gerade nicht schneidet. Der Grenzfall tritt ein, wenn die Gerade zur Tangente wird.

Lösung. E ist die Mitte von BC, $EA \perp L$. A löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist $2(AB^2 + AC^2) = 4AE^2 + BC^2$,
$2(DB^2 + DC^2) = 4DE^2 + BC^2$.

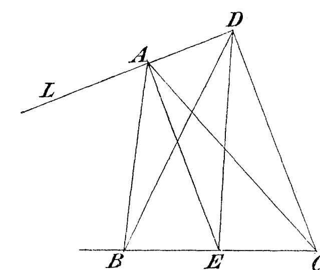


Fig. 15.

Nun ist aber $DE > AE$, folglich auch $DB^2 + DC^2 > AB^2 + AC^2$, w. z. b. w.

In jedem Dreiecke liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Wenn wir in der Aufgabe die „gegebene Gerade“ durch einen „gegebenen Kreis“ ersetzen, so erhalten wir die Lösung dadurch, dafs wir E, die Mitte von BC, mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises verbinden. So erhalten wir ein Maximum und auch ein Minimum.

10.

Gegeben ein Dreieck. Es soll ein Punkt D von der Art gefunden werden, dafs die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Ecken ein Minimum sei.

Nehmen wir zunächst an, der Punkt D habe vom Punkte A die feste Entfernung m. Dann befindet er sich auf einem mit m um A beschriebenen Kreise. Jetzt richten wir es so ein, dafs wenigstens $DB^2 + DC^2$ ein Minimum wird. Dies erreichen wir dadurch, dafs wir D in den Schnittpunkt des Kreises mit der zu A gehörenden Mittellinie verlegen. Folglich liegt D auf dieser Mittellinie, und da gleiche Schlüsse für die beiden anderen Mittellinien gelten, so ist D der Schwerpunkt des Dreiecks.

Beweis. Wir lösen die Voraufgabe:

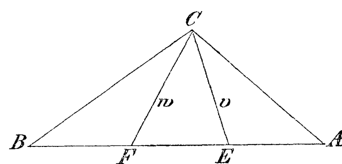


Fig. 16 a.

$AE = \frac{1}{3} AB$. Man bestimme $CE = v$.

Durch Anwendung des Cosinussatzes auf Dreieck CAE und CAB findet man $9v^2 = 3a^2 + 6b^2 - 2c^2$. Diese Formel ist in Bezug auf die drei Seiten unsymmetrisch. Vertauscht man a, b, c auf alle möglichen (6) Arten miteinander, so nimmt die Formel 6 verschiedene Werte an, wie es sein mufs. Für die Strecke $CF = n$ findet man z. B. den Wert $9n^2 = 3b^2 + 6a^2 - 2c^2$. Die Formel für t_a ist symmetrisch in Bezug auf b und c. Sie erlangt durch beliebige Vertauschung der Buchstaben a, b, c nur drei Werte, die der drei Mittellinien.

Jetzt lösen wir die folgende Aufgabe:

Ein Punkt O habe von den Ecken des Dreiecks A, B, C die Abstände x, y, z; wie grofs ist sein Abstand vom Schwerpunkt?

Zunächst berechnen wir OD aus der Formel:

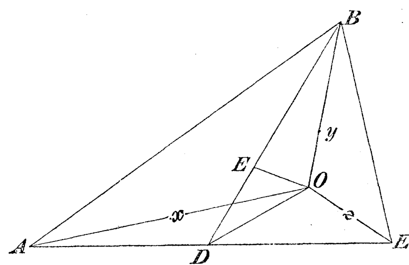


Fig. 16 b.

$$4OD^2 + b^2 = 2x^2 + 2z^2.$$

Dann wenden wir die vorhin gefundene Formel auf das Dreieck BDO an und finden, indem wir $OE = s$ setzen:

$$9s^2 = 6OD^2 + 3y^2 - DB^2.$$

Um Brüche zu vermeiden, multiplizieren wir diese Gleichung mit 2.

Dann wird $\qquad 18s^2 = 12\,OD^2 + 6y^2 - 4\,DB^2,$

$$18s^2 = 3(2x^2 + 2z^2 - b^2) + 6y^2 - (2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

folglich endlich

$$9s^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Dies ist eine sehr interessante Gleichung. Man kann aus derselben zunächst erkennen, dafs $x^2 + y^2 + z^2$ seinen kleinsten Wert erhält, wenn s^2 möglichst klein, also Null ist. Hiermit ist die Richtigkeit unserer Lösung dargethan. Man kann aber der Gleichung den folgenden merkwürdigen Satz entnehmen:

Beschreibt man um den Schwerpunkt des Dreiecks einen Kreis, so hat die Summe der Quadrate der Abstände jedes Punktes des Kreises von den Eckpunkten immer denselben Wert.

Der kleinste Wert dieser Quadratensumme ist

$$\tfrac{4}{9}t_a^2 + \tfrac{4}{9}t_b^2 + \tfrac{4}{9}t_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ändert sich gar nicht, wenn man a, b, c ganz beliebig miteinander vertauscht. Sie heifst eine symmetrische Funktion der Gröfsen a, b, c.

11.

In einem Dreieck soll ein Punkt gefunden werden, von welchem aus gesehen die drei Seiten unter gleichen Winkeln erscheinen.

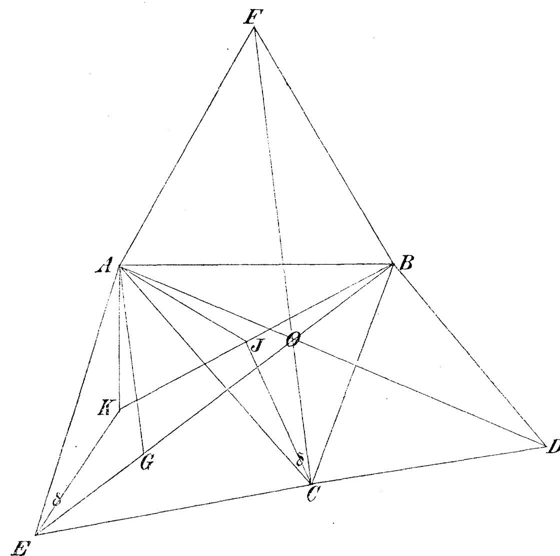


Fig. 17.

Die Summe der drei Sehwinkel beträgt 360°, folglich jeder 120°.

Lösung. Man setze nach aufsen hin auf die Seiten gleichseitige Dreiecke auf und beschreibe die den Dreiecken AEC und BCD umschriebenen Kreise. Sie schneiden sich im Punkte O.

Beweis. Die beiden Vierecke $AOCE$

und $BOCD$ sind Kreisvierecke. Die betreffenden Kreise haben schon den einen Punkt C gemeinsam; folglich müssen sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam haben. Nun ist $\sphericalangle AOC = 120^0$, ebenso $\sphericalangle BOC$, und so bleibt für AOB nur 120^0 übrig. Also ist auch $FAOB$ ein Kreisviereck, und die Aufgabe ist gelöst.

Als Zugabe erhalten wir einen interessanten Satz:

Beschreibt man um die den Dreiecksseiten aufgesetzten regelmäfsigen Dreiecke die umschriebenen Kreise, so gehen dieselben durch einen Punkt.

In einem Kreisvierecke beträgt die Summe der gegenüberliegenden Winkel zwei Rechte. Umkehrung.

Zweite Lösung. Man verbinde die Punkte C, F, ebenso E, B. Die Verbindungslinien schneiden sich in dem gesuchten Punkte.

Beweis. Die Dreiecke BAE und FAC sind deckend. Folglich sind die Winkel derselben bei E und C durch denselben Buchstaben δ als gleich zu bezeichnen. Hieraus ergiebt sich, dafs die Figur $AOCE$ ein Kreisviereck ist, also der Winkel $AOC = 120^0$. Ebenso zeigt man, dafs $AOBF$ ein Kreisviereck, mithin $\sphericalangle AOB = 120^0$ ist. Folglich ist auch $\sphericalangle BOC = 120^0$.

Als Zugabe erhält man den Satz, dafs die drei Verbindungslinien der Spitzen der aufgesetzten Dreiecke mit den gegenüberliegenden Ecken des ursprünglichen Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Der Beweis wird am besten indirekt geführt. Angenommen, die dritte Verbindungslinie AD laufe nicht durch O, sondern treffe FC im Punkte O'. Dann müfste O' dieselbe Eigenschaft wie O bezüglich der Winkel von 120^0 haben, und das ist unmöglich.

Ferner haben wir erkannt, dafs $AD = BE = FC$ ist. Nun stehen die Winkel AOC und COE über den gleichen Sehnen $AE = AC$; daher ist $\sphericalangle AOG = 60^0$, also, wenn $OG = OA$, auch $AG = AO$. Daraus folgt, dafs $AGE \cong AOC$, also $EG = OC$.

Hieraus ergiebt sich der Satz, dafs die Summe der Entfernungen des Punktes O von den Dreiecksecken den obigen Verbindungslinien gleich ist, oder:

$$OA + OB + OC = AD = BE = FC.$$

Jeder Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht.

Alle Peripheriewinkel eines Kreises, welche über gleichem Bogen (gleicher Sehne) stehen, sind einander gleich.

Der geometrische Ort aller Punkte, von denen gesehen eine Strecke unter demselben Winkel erscheint, ist ein Kreisbogen.

Es ist $cos\, 60^0 = \frac{1}{2}$, $cos\, 120 = -\frac{1}{2}$. Setzen wir:

$$OA = x,\ \ OB = y,\ \ OC = z,$$

so erhalten wir für die rechnerische Lösung unserer Aufgabe mit Hülfe des Cosinussatzes die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + xy = c^2,$$
$$y^2 + z^2 + yz = a^2,$$
$$z^2 + x^2 + zx = b^2.$$

Aus einer dieser drei Gleichungen ergeben sich die übrigen durch cyklische Vertauschung. Subtrahiert man die zweite von der ersten, so erhält man nach Division durch $x - z$:

$$x + y + z = \frac{c^2 - a^2}{x - z}.$$

Durch cyklische Vertauschung kann man hieraus zwei andere Gleichungen ableiten. Ferner kann man den Inhalt des Dreiecks ABC als gegeben durch F bezeichnen. Indem man denselben als Summe der Inhalte von AOB, BOC, COA darstellt, erhält man:

$$xy + yz + zx = \frac{4F}{\sqrt{3}}.$$

Denn es ist $sin\, 120^0 = sin\, 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $F = \frac{1}{2}\, b\, c\, sin\, \alpha$. Durch Addition der ersten drei Gleichungen und Hinzufügung der Gröfse $3(xy + yz + zx)$ erhält man nun

$$2(x + y + z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\, F.$$

Eine andere Anbahnung der Lösung gewinnt man durch Anwendung des Sinussatzes auf die Dreiecke AGE und BAE. Es findet sich:

$$b\, sin\, \delta = x\, sin\, 60^0 = c\, sin(60^0 + \alpha + \delta).$$

Durch Anwendung des Additionstheorems des *sinus* kann man nach Division durch $sin\, \delta$ einen Ausdruck für $tg\, \delta$ finden.

Die Additionstheoreme der Funktionen *sin* und *cos* lauten:

$$sin\, (\alpha + \beta) = sin\, \alpha\, cos\, \beta + cos\, \alpha\, sin\, \beta,$$
$$cos\, (\alpha + \beta) = cos\, \alpha\, cos\, \beta - sin\, \alpha\, sin\, \beta.$$

Sie bieten das geeignetste Mittel, um die ursprünglich nur für spitze Winkel gültigen Erklärungen der Funktionen *sin* und *cos* unbegrenzt für positive und negative reelle Werte der Argumente zu erweitern. Man leitet zunächst, indem man die beiden vorstehenden Gleichungen nach den Unbekannten $sin\, \beta$ und $cos\, \beta$ auflöst, die folgenden ab:

$$sin\,\beta = sin(\alpha + \beta)\,cos\,\alpha - cos(\alpha + \beta)\,sin\,\alpha,$$
$$cos\,\beta = cos(\alpha + \beta)\,cos\,\alpha + sin(\alpha + \beta)\,sin\,\alpha.$$

Alsdann ersetzt man die allgemeine Gröfse $\alpha + \beta$ durch x, α durch y, also β durch $x - y$, und erhält so die beiden Subtraktionstheoreme:

$$sin(x - y) = sin\,x\,cos\,y - cos\,x\,sin\,y,$$
$$cos(x - y) = cos\,x\,cos\,y + sin\,x\,sin\,y.$$

Wenn wir nun $x = 0$ setzen, so finden wir $sin(-y) = -sin\,y$, $cos(-y) = cos\,y$ und aus den Additionstheoremen durch die Annahme $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$ sofort $sin\,180^0 = 0$, $cos\,180^0 = -1$. Durch die Subtraktionstheoreme finden wir nun weiter $sin(180^0 - \alpha) = sin\,\alpha$, $cos(180^0 - \alpha) = -cos\,\alpha$. — Die Fortsetzung dieser Betrachtungsweise ist ohne weiteres klar.

12.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

Lösung. Man lege durch die gegebenen Punkte A und B einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in den Punkten C und D schneiden möge. Durch den Schnittpunkt E der Geraden AB und CD ziehe man an den Kreis eine Tangente und lege durch ihren Berührungspunkt F und die beiden ursprünglichen Punkte A, B einen Kreis. Dieser Kreis löst die Aufgabe.

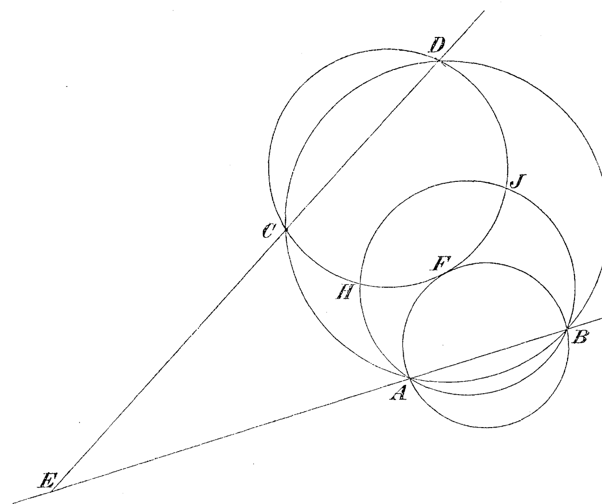


Fig. 18.

Beweis. Die gerade Linie EF hat mit dem gegebenen Kreise als Tangente nur den Punkt F gemeinsam. Wir werden zeigen, dafs EF auch den Lösungskreis im Punkte F berührt. Dann ist der Beweis geliefert, dafs die

beiden Kreise sich im Punkte F berühren. Angenommen, der durch die drei Punkte F, A, B gelegte Kreis berühre die Gerade EF nicht. Dann mufs er sie schneiden. Der zweite Schnittpunkt sei G. Dann ist $EF \cdot EG = EA \cdot EB$; ferner in Bezug auf den Hülfskreis $EA \cdot EB = EC \cdot ED$, und endlich in Bezug auf den gegebenen Kreis $EC \cdot ED = EF^2$. Es wäre also $EF \cdot EG = EF^2$, oder $EF = EG$, ein Teil gleich dem Ganzen, w. u. i.

Einschränkung. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn ein Punkt innerhalb und ein Punkt aufserhalb des Kreises gegeben ist. Ein Grenzfall tritt ein, wenn ein Punkt auf dem Kreise gegeben ist. Alsdann ist nur eine Lösung vorhanden. Im allgemeinen erhält man zwei Lösungen, da man von E aus zwei Tangenten an den gegebenen Kreis ziehen kann. Eine scheinbare Ausnahme findet statt, wenn E ins Unendliche rückt. Dies tritt ein, wenn A und B vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises gleichen Abstand haben. Wir lösen dann die Aufgabe dadurch, dafs wir von diesem Mittelpunkte aus auf AB eine Senkrechte fällen. Diese Senkrechte treffe den gegebenen Kreis in den Punkten F und F'. Dann löst der durch A, B, F und der durch A, B, F' gelegte Kreis unsere Aufgabe. Übrigens geht diese Lösung auch aus der allgemeinen hervor. Denn wenn E ins Unendliche rückt, so wissen wir doch, in welcher Richtung E liegt, nämlich in der durch AB bestimmten. Eine Tangente vom unendlich fernen E aus ist also gleichbedeutend mit einer AB parallelen Tangente.

Anmerkungen. Zieht man durch einen Punkt Gerade, welche einen Kreis schneiden, so ist das Rechteck gebildet aus den Abständen des Punktes von den Kreisschnittpunkten von unveränderlicher Gröfse. (Potenz am Kreise, Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis.)

Wenn zwei Sehnen eines Kreises sich schneiden, so bilden die Teilstücke der einen die äufseren, diejenigen der andern die inneren Glieder einer Proportion.

Wenn zwei Sekanten eines Kreises sich schneiden, so verhalten sich die äufseren Abschnitte derselben umgekehrt wie die ganzen Sekanten.

Wenn eine Tangente und eine Sekante eines Kreises sich schneiden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen dem äufsern Abschnitte und der ganzen Sekante.

Wir erhalten durch unsere Aufgabe einen Lehrsatz als Zugabe. Jeder durch die Punkte A, B gelegte Kreis schneidet den gegebenen Kreis so, dafs derselbe Punkt E entsteht. Denn dieser Punkt ist durch die gemeinsame Tangente des gegebenen und des gesuchten Kreises fest bestimmt. Unzählig viele Kreise, welche durch zwei feste Punkte gehen, nennt man ein Kreisbüschel.

Ein Kreis schneidet ein Kreisbüschel derartig, dafs alle gemeinsamen Sehnen durch einen festen Punkt gehen.

Beweis. Man lege durch A, B einen willkürlichen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in den Punkten H, J schneiden möge. Wir behaupten, HJ geht durch E. Wir verbinden E mit H, dann mufs EH beide Kreise schneiden. Es möge den gegebenen Kreis in J, den Kreis des Büschels in J' schneiden. Dann wäre $EH \cdot EJ' = EA \cdot EB$ und $EH \cdot EJ = EC \cdot ED = EA \cdot EB$, also $EJ = EJ$. Dies ist nur möglich, wenn EH beiden Kreisen in demselben Punkte begegnet.

13.

Zwei feste Punkte A, B sind auf derselben Seite einer Geraden gegeben. Man bestimme auf der Geraden einen Punkt derartig, dafs die Summe seiner Abstände von den beiden festen Punkten ein Minimum wird.

Gelegentlich der Aufgabe 9 erkannten wir, dafs wir uns zunächst mit der Aufgabe zu beschäftigen haben, welche verlangt, dafs die fragliche Summe eine bestimmte Gröfse erhalte, und dafs wir dann die Einschränkung dieser Aufgabe geben müssen.

Wir fällen von dem Punkte B aus eine Senkrechte auf die gegebene Linie und verlängern sie um sich selbst bis E. Alsdann beschreiben wir um den andern Punkt A mit der gegebenen Strecke $AD = s$ einen Kreis und suchen nun denjenigen Kreis auf, welcher durch die Punkte E und B geht und den um A mit s beschriebenen Kreis berührt. Der Mittelpunkt dieses Kreises C liegt auf der Geraden und löst die Aufgabe. Denn $AC + CB = AC + CD = s$.

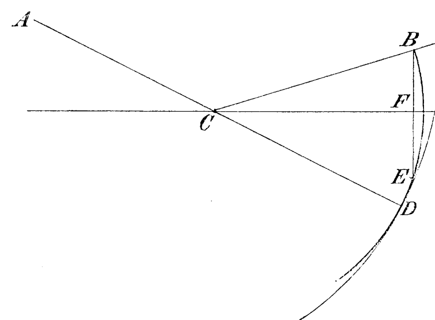


Fig. 19.

Die Aufgabe läfst keine Lösung zu, wenn E aufserhalb des um A mit s beschriebenen Kreises liegt.

Der Grenzfall (dem unsere Figur sich nähert) tritt ein, wenn E genau auf der Peripherie des um A mit s beschriebenen Kreises liegt. Bevor wir aus dieser Erkenntnis die Lösung unserer Minimalaufgabe ableiten, wollen wir noch einige besondere Fälle der allgemeinen Lösung besprechen. Geht die gegebene Gerade durch beide Punkte A, B, so beschreiben wir um die Mitte M von

AB einen Kreis mit $\frac{s}{2}$. Dieser Kreis trifft die Gerade in den gesuchten Punkten.



Fig. 20.

Es ist nämlich $CA + CB = CA + CA + 2\,AM = 2\,CM = s$. Ist $s < AB$, so erhält man keine eigentliche Lösung. Die Bedeutung der uneigentlichen Lösung wird später klar werden.

Zunächst soll jetzt die Minimal-Aufgabe gelöst werden.

Lösung. Wir fällen von dem einen der gegebenen Punkte, etwa von B, auf die gegebene Gerade eine Senkrechte und verlängern dieselbe um sich selbst bis D. Dann verbinden wir D mit A. C löst die Aufgabe, da $AC + CB$ ein Minimum ist.

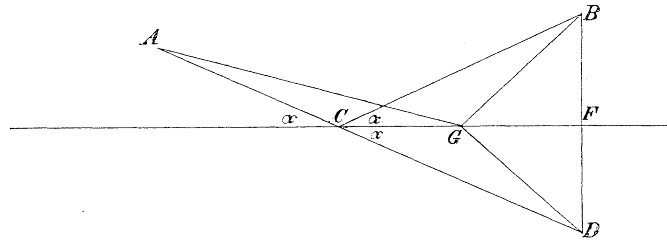


Fig. 21.

Beweis. Greifen wir auf der gegebenen Geraden irgend einen andern Punkt heraus, etwa G, verbinden G mit B und D, so ist zu zeigen, dafs ist:

$$AG + GB > AC + CB.$$

Durch Kongruenz von Dreiecken zeigt man, dafs $GB = GD$, $CB = CD$, also $AG + GB = AG + GD$, während $AC + CB = AC + CD$ ist. Nun ist aber $AG + GD > AC + CD$, folglich unsere Behauptung bewiesen.

Die soeben gelöste Aufgabe hat zahlreiche physikalische Anwendungen. Wenn eine elastische Kugel A in der Richtung AC gegen eine feste elastische Wand gestofsen wird, so prallt sie in der Richtung CB nach dem Stofse zurück. Analoges gilt von Schall und Licht.

Die Summe zweier Dreiecksseiten ist gröfser als die dritte.

14.

Man bestimme einen Punkt derartig, dafs die Summe seiner Abstände von drei festen Punkten ein Minimum sei.

Vorbereitung. Wir beschreiben zunächst um einen der Punkte, etwa um A, mit einem willkürlichen, aber nicht zu grofsen Radius einen Kreis, der keinen der anderen gegebenen Punkte B, C einschliefst. Auf diesem Kreise suchen wir einen Punkt D so zu bestimmen, dafs zunächst einmal $DB + DC$ ein Minimum sei. Zu diesem Zwecke legen wir in D an den Kreis eine Tangente. Dann mufs um so mehr auch für jeden Punkt dieser Tangente $BD + DC$ ein Minimum sein. Dies ist der Fall, wenn die Linien BD und DC mit der Tangente gleiche Winkel bilden. Also mufs AD den Winkel der beiden anderen BD und CD halbieren. Folglich erhalten wir als notwendige Bedingung, da Gleiches für alle drei Punkte gilt: Die drei Linien AD, BD, CD müssen jede den Winkel der beiden anderen halbieren, wenn D der gesuchte Punkt sein soll.

Lösung. Der in Aufgabe 11 erhaltene Punkt O ist der gesuchte Punkt.

Beweis. J (Fig. 17) sei ein beliebiger Punkt. Es ist zu zeigen, dafs $JA + JB + JC > OA + OB + OC$. Das Dreieck AJK sei gleichseitig. Man drehe Dreieck AKE um 60^0, so dafs AE in die Richtung von AC kommt. Dann fällt AK auf AJ, KE auf JC. Hiermit ist unser Satz bewiesen; denn

$$BJ + JK + KE > BE,$$

also auch

$$BJ + JA + JC > OA + OB + OC.$$

Der fragliche Punkt O hat so viele interessante Eigenschaften, dafs man ihn mit mehr Recht als irgend einen andern den fünften merkwürdigen Punkt des Dreiecks genannt hat.

15.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist a, α, $b + c = s$.

Lösung. Über der Strecke a mit den Endpunkten B, C beschreibe man einen Kreisbogen, der den Winkel α fafst. Um den Pfeilpunkt D dieses Bogens beschreibe man mit DB als Radius einen Kreis, der auch durch C geht und folglich den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ fafst, da der Centriwinkel bei D die Gröfse α hat. Jetzt be-

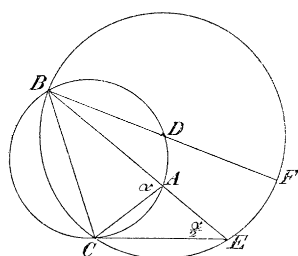


Fig. 22.

schreibe man um B mit s als Radius einen Kreis, der den zweiten Hülfskreis im Punkt E trifft. EB schneidet den ersten Hülfskreis im gesuchten Punkte A.

Beweis. Da $\measuredangle BAC = \alpha$, $BEC = \frac{\alpha}{2}$ ist, so bleibt für $\measuredangle ACE$ der Wert $\frac{\alpha}{2}$. Folglich ist $AC = AE$ und $AB + AC = BE = s$, w. z. b. w.

Einschränkung. Die Lösung wird unmöglich, wenn $s > 2\,BD$. Sonst erhält man zwei nur durch die Lage verschiedene Lösungen. Die Lösungen werden uneigentlich, wenn $s < a$.

16.

Auf einem Kreisbogen einen Punkt zu bestimmen, so dafs die Summe der zugehörigen Sehnen ein Maximum wird.

Die allgemeinere Voraufgabe ist mit 15 übereinstimmend.

Lösung. Man verbinde den Pfeilpunkt D (Fig. 22) mit den Endpunkten B, C des Kreisbogens.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs $BD + DC > BA + AC$. Dies würde der Fall sein, wenn $BD + DF > BA + AE$ oder $BF > BE$ wäre. Das letztere ist aber der Fall, folglich die Aufgabe richtig gelöst.

Die Anknüpfung: Wenn A sein soll, so mufs B sein; wenn B sein soll, mufs C sein u. s. w., führt logisch nur auf eine notwendige Bedingung. Dagegen kommt man durch eine Gedankenreihe: A würde sein, wenn B wäre; B würde sein, wenn C wäre u. s. w., auf eine genügende Bedingung. In der Mathematik wird häufig eine notwendige Bedingung auch als genügend erkannt.

Eine Sehne ist um so gröfser, je kleiner ihr Abstand vom Mittelpunkte ist. Der Durchmesser ist die gröfste Sehne.

17.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist a, α, $b - c = d$.

Die in Aufgabe 15 erwähnte uneigentliche Lösung $s < a$ wird hier als eigentliche Lösung erhalten.

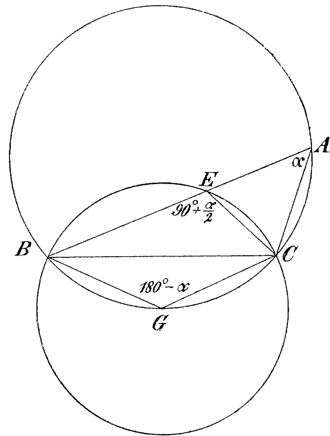


Fig. 23.

Lösung. In nebenstehender Figur ist $BC = a$. Der über BC stehende Kreisbogen BAC fafst den Winkel α. Um G, den tiefsten Punkt des entgegengesetzten Kreisbogens, ist mit GB als Radius ein Kreis beschrieben, der auch durch C geht. Um B ist mit d als Radius ein Kreis beschrieben, der den zweiten Hülfskreis auf der Innenseite in E trifft. BAC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dafs $AE = AC$, da $BE = d$ ist. Nun ist $BGCA$ ein Kreisviereck, also der hohle Winkel bei G ist $180^0 - \alpha$, der erhabene $180^0 + \alpha$, folglich der zugehörige Peripheriewinkel $BEC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$. Daher ist $\sphericalangle AEC = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, und somit bleibt für $\sphericalangle ACE$ auch $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ übrig. Also ist Dreieck AEC gleichschenklig.

Einschränkung. Die Lösung wird uneigentlich, wenn nicht $d < a$.

18.

Eine Gerade und zwei Punkte A, B sind gegeben. Man bestimme einen Punkt C so auf der Geraden, dafs die Differenz $d = CA - CB$ eine vorgeschriebene Gröfse hat.

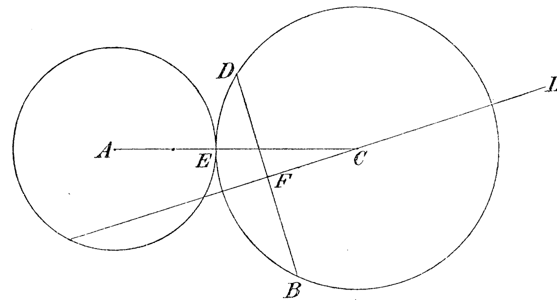


Fig. 24.

Lösung. Man fälle von dem gegebenen Punkte B aus auf die gegebene Gerade L eine Senkrechte BF und mache $DF = FB$. Dann beschreibe man einen Kreis, welcher den um A mit der Strecke d gezogenen Kreis berührt und durch die Punkte B und D geht. Sein Mittelpunkt löst die Aufgabe.

Beweis. Dieser Mittelpunkt liegt auf der Geraden L, da sie Mittelsenkrechte zur Strecke BD ist. Verbindet man A mit C,

so geht die Verbindungslinie durch den Berührungspunkt E, und es ist $AC - CB = AE + EC - CB = AE = d$.

Einschränkung. Wenn D in das Innere des um A beschriebenen Kreises fällt, so ist die Aufgabe unlösbar. So oft D auf die Peripherie fällt, tritt eine Grenzlage mit nur einer Lösung auf. In den übrigen Fällen erhält man zwei Lösungen. Dabei kann man beachten, dafs für den durch unsere Figur dargestellten Fall die zweite Lösung $CB - CA = d$ ergiebt und nicht $CA - CB = d$. Man könnte daher geneigt sein, diese zweite Lösung als eine uneigentliche zu bezeichnen. Doch werden wir an späterer Stelle uns überzeugen, dafs diese Unterscheidung hier am besten nicht gemacht wird.

19.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist r, ϱ, α.

Wenn r und a gegeben ist, so ist immer der Winkel α mitbestimmt. Verbindet man den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit den Ecken, so entstehen die drei Centriwinkel $90 + \frac{\alpha}{2}$, $90 + \frac{\beta}{2}$, $90 + \frac{\gamma}{2}$. Der erstere ist in Aufgabe 17 in anderer Beziehung aufgetreten.

Lösung. Wir beschreiben über BC einen Bogen, welcher α fafst. Um den tiefsten Punkt D des gegenüberliegenden Bogens beschreiben wir mit $BD = DC$ einen Bogen, der einer im Abstande ϱ zu BC gezogenen Parallelen im Punkte O begegnet. An den um O mit ϱ beschriebenen Kreis ziehen wir von B und C aus Tangenten, welche sich in A begegnen.

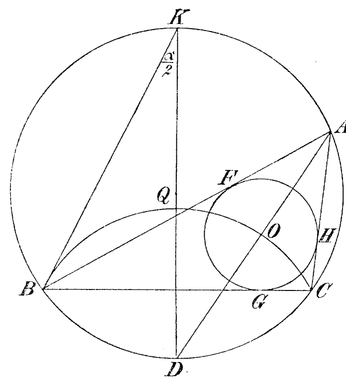


Fig. 25.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $\measuredangle\, BAC = \alpha$; denn dann liegt A auf dem Kreisbogen, welcher α fafst, also auf dem mit r als Radius durch die Punkte B, C gelegten Kreise. — $\measuredangle\, BOC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$ besteht aus den Stücken BOG und COG. Diese sind bezüglich gleich den Winkeln BOF und COH. Folglich ist der erhabene Winkel $FOH = 2\,BOC = 180^0 + \alpha$. Das Viereck $FOHA$ ist ein Kreisviereck und, da sein $\measuredangle\, FOH =$

$180^0 - \alpha$ als Ergänzung zu dem erhabenen Winkel FOH, so bleibt für $\measuredangle BAC$ der Wert α übrig. F, G, H sind die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises und der Einfachheit wegen nicht mit O verbunden.

Einschränkung. Es mufs sein $r \geqq \frac{a}{2}$; ϱ darf nicht gröfser sein als die Pfeilhöhe des zweiten Hülfskreises.

Anmerkungen. Die drei Winkelhalbierer eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, und dieser Punkt hat von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand. Beweis durch kongruente Dreiecke.

Heifsen die drei Treffpunkte der Winkelhalbierer auf den Gegenseiten α, β, γ, so ist nach dem in Aufgabe 4 erwähnten Satze:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1.$$

Dies ist eine Anwendung des Cevaschen Satzes.

Betrachtet man AB und AC als feste Tangenten, BC als eine sich ändernde, so erkennt man, dafs die veränderliche Tangente in ihren Schnittpunkten mit den beiden festen Tangenten stets denselben Winkel im Mittelpunkte des Kreises spannt. $\measuredangle BOC = 90 + \frac{\alpha}{2}$. Mit der vorhin gelösten Aufgabe stimmt völlig überein: Gegeben ein Kreis und zwei feste Tangenten desselben; man soll eine dritte Tangente so ziehen, dafs das auf ihr durch die festen Tangenten abgeschnittene Stück eine vorgeschriebene Gröfse habe. In dieser Fassung führt die Aufgabe zu einer interessanten Maximal- und Minimalaufgabe.

20.

Man berechne den Abstand d des eingeschriebenen Kreises O von dem des umschriebenen Kreises Q.

Verbindet man (Fig. 25) O mit Q und zieht durch bis zu den Schnittpunkten mit dem umschriebenen Kreise, so ist nach dem Satze von der Potenz am Kreise $OA \cdot OD = (OQ + r)(r - OQ) = (r + d)(r - d)$. Nun ist in den Dreiecken OFA und KBD bezüglich:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{OA} = \frac{BD}{KD} = \frac{OD}{KD} = \frac{OD}{2r},$$

folglich

$$2r\varrho = OD \cdot OA = r^2 - d^2.$$

Damit ist eine berühmte Aufgabe gelöst, welche für das Dreieck zuerst Euler erledigt hat. Fragt man nach der Beziehung, welche erfüllt sein mufs, damit ein n-Eck einem Kreise mit dem Radius ϱ umschrieben und zugleich einem andern mit dem Radius r eingeschrieben sei, so ist die Antwort durch C. G. J. Jacobi, Ges. Werke, Bd. I, S. 277, mit Hülfe der elliptischen Funktionen erteilt worden.

21.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, ϱ, u. (u = Umfang.)

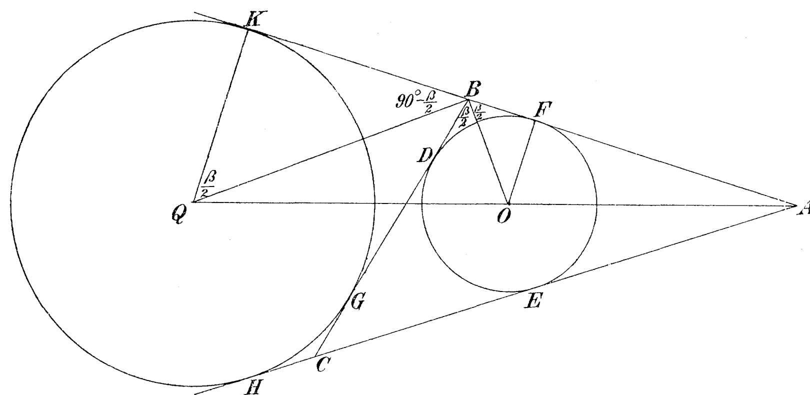


Fig. 26.

Lösung. Man führe die Bezeichnung $u = 2\sigma$ ein und trage von einem willkürlichen Punkte A aus auf einer willkürlichen Geraden die Strecken $AF = \sigma - a$ und $AK = \sigma$ ab. Im Punkte F errichte man zu der Geraden die Senkrechte $FO = \varrho$. AO möge eine im Punkte K zu derselben Geraden errichtete Senkrechte im Punkte Q treffen. Dann beschreibe man um Q mit QK und um O mit OF Kreise, bestimme eine äuſsere und eine innere Tangente, und Dreieck ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist $BG = BK$, $CG = CH$. Daher ist

$$AB + BC + CA = AB + BK + AC + CH =$$
$$AK + AH = 2AK = u.$$

Also der Umfang des Dreiecks ist u, wie verlangt wurde. Ferner ist BC, die Grundlinie, aus den Stücken BD und CD zusammengesetzt, welche bezüglich BF und CE gleich sind. Daher:

$$BC = BF + CE = AB - AF + AC - AE =$$
$$AB + AC - 2AF,$$

oder nach beiderseitiger Hinzufügung von BC:

$$2BC = 2\sigma - 2(\sigma - a) = 2a.$$

Einschränkung. Die beiden Hülfskreise um O und Q dürfen sich nicht schneiden.

Anmerkung. Unsere Aufgabe führt zu folgenden Gröſsenbestimmungen:

$$AF = AE = \sigma - a; \quad AK = AH = \sigma,$$
$$BF = BD = \sigma - b; \quad BG = BK = \sigma - c,$$
$$CE = CD = \sigma - c; \quad CG = CH = \sigma - b.$$

Ferner $KF = a$, $DG = BG - BD = b - c$.

Aus diesen Gröfsenbestimmungen kann man viele Aufgaben bilden. Das Dreieck ABC erscheint als Summe der Dreiecke AOB, BOC, COA; daher erhalten wir für seinen Inhalt I die Formel

$$I = \varrho \sigma.$$

Man kann I auch darstellen als $QBA + QCA - QBC$ und findet dann $QK = \varrho_a$,

$$I = \varrho_a (\sigma - a).$$

Nun folgt durch Multiplikation

$$I^2 = \varrho \varrho_a \sigma (\sigma - a).$$

Es ist aber auch aus den Dreiecken BOF und QBK:

$$tg \frac{\beta}{2} = \frac{OF}{BF} = \frac{\varrho}{\sigma - b}; \quad tg \frac{\beta}{2} = \frac{\sigma - c}{\varrho_a} = \frac{KB}{KQ}.$$

Daher $$\varrho \varrho_a = (\sigma - b)(\sigma - c),$$

also $$I^2 = \sigma (\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c).$$

Dies ist die berühmte Heronische Formel. Die Ableitung derselben in obiger Form fand ich zuerst bei J. Petersen. Aus den Formeln

$$\varrho^2 = \frac{(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)}{\sigma},$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - a}, \quad tg \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - b}, \quad tg \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\sigma - c}$$

leitet man dann am vorteilhaftesten trigonometrisch die Werte der Winkel ab, wenn die Seiten des Dreiecks gegeben sind und gröfsere Zahlwerte besitzen.

Eine blofs rechnerische Ableitung der Heronischen Formel schliefst man an Aufgabe 6 an. Es ist

$$I = \tfrac{1}{2} ah, \quad 4 I^2 = a^2 (c^2 - x^2) = a^2 (c - x)(c + x).$$

Nun ist aber

$$c - x = c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a},$$

$$c - x = \frac{(b - c + a)(b - a + c)}{2a}.$$

Ebenso findet man

$$c + x = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2a}.$$

Daher wird

$$16 I^2 = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \text{ u. s. w.}$$

Diese Ableitung ist zwar bei weitem weniger elegant als die vorige. Allein sie bietet ein ausgezeichnetes Mittel, die algebraischen Grundregeln zu wiederholen und anzuwenden. Wir haben eine solche Wiederholung in Aufgabe 6 angedeutet.

Die Heronische Formel kann auch noch eine andere Gestalt annehmen. Wir schliefsen:

$$4 I^2 = a^2 c^2 - a^2 \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4 a^2},$$

oder $$16 I^2 = - a^4 - b^4 - c^4 + 2 a^2 c^2 + 2 b^2 a^2 + 2 c^2 b^2.$$

In dieser Form wird dieselbe immer angewandt, wenn nicht die Seiten des Dreiecks, sondern die Quadrate der Seiten gegeben sind. Letzteres ist in der Geometrie, besonders der räumlichen, häufig der Fall.

22.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist $b + c = s$, ϱ_b, ϱ_c.

Lösung. Auf einer willkürlichen Geraden trage man die Strecke $DE = s$ ab, errichte in D und E Senkrechte und trage auf ihnen in gleichem Sinne die Strecken ϱ_b, ϱ_c ab. Endlich ziehe man an die mit ϱ_b und ϱ_c um O und Q beschriebenen Kreise die beiden inneren gemeinsamen Tangenten. Sie bilden mit der ursprünglichen Geraden das gesuchte Dreieck ABC.

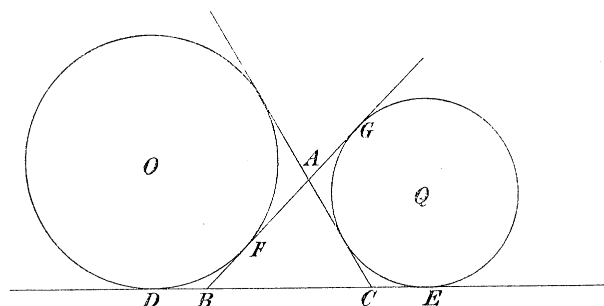


Fig. 27.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $AB + AC = DE = s$ ist. Nun haben wir erkannt, dafs $DC = \sigma$, $BE = \sigma$, $CE = \sigma - a$ ist, wenn σ den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet. Also ist

$$DE = s = \sigma + \sigma - a = 2\sigma - a = AB + AC, \text{ w. z. b. w.}$$

Einschränkung. Die beiden Kreise um O und Q dürfen sich nicht schneiden. Der Grenzfall tritt bei Berührung der Kreise ein, und dann ist $(\varrho_b + \varrho_c)^2 = (\varrho_b - \varrho_c)^2 + s^2$, oder $4\,\varrho_b\,\varrho_c = s^2$. Zugleich ist $a = 0$.

An unserer Figur können wir noch $BF = BD = \sigma - a$, $BG = \sigma$ und darum $FG = a$ bemerken. Dies giebt die Lösung der Aufgabe: ein Dreieck aus a, ϱ_b, ϱ_c zu bestimmen.

23.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b^2 - c^2 = d^2$, t_a.

Lösung. In einer Nebenfigur stellen wir ein hinreichend grofses rechtwinkliges Dreieck her, dessen eine Kathete d sei. Die andere Kathete bezeichnen wir mit y, die Hypotenuse mit x. Es ist also

$$x^2 - y^2 = d^2.$$

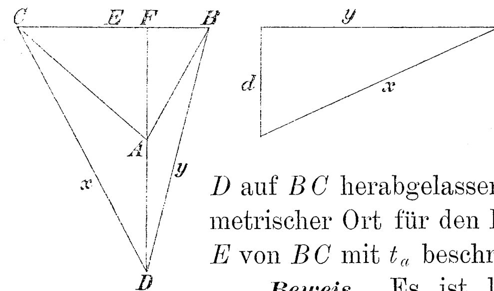


Fig. 28.

Jetzt beschreiben wir um den Endpunkt B der Strecke a mit y, um C mit x Kreise, welche sich in D schneiden. Die von D auf BC herabgelassene Senkrechte ist ein geometrischer Ort für den Punkt A, ein um die Mitte E von BC mit t_a beschriebener Kreis ein zweiter.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $AC^2 - AB^2 = d^2$ ist. Man hat:

$$DF^2 = x^2 - CF^2 = y^2 - BF^2, \text{ also } x^2 - y^2 = CF^2 - BF^2;$$

$$AF^2 = AC^2 - CF^2 = AB^2 - BF^2, \text{ also } AC^2 - AB^2 = CF^2 - BF^2.$$

Folglich ist

$$AC^2 - AB^2 = x^2 - y^2 = d^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Einschränkung. Es ist zunächst klar, dafs die beiden geometrischen Örter sich schneiden müssen; die beiden entstehenden Lösungen sind kongruent. Allein es kann ein Bedenken auftauchen, ob DF immer herstellbar ist, oder ob der Punkt F immer aufgefunden werden kann. Um diese Frage zu entscheiden, setzen wir $CF = z$; dann wird $BF = a - z$ und $z^2 - (a - z)^2 = d^2$, also

$$z = \frac{a}{2} + \frac{d^2}{2a}.$$

Diese Rechnung bleibt auch gültig, wenn F über B hinaus liegt. Hiermit ist nun die Entscheidung getroffen und zwar in bejahendem Sinne: der Punkt F kann unter allen Umständen aufgefunden werden.

Anmerkungen. Die Konstruktion des algebraischen Ausdrucks $u = \frac{d^2}{2a}$ zeigt die nebenstehende Figur:

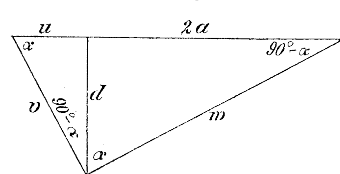


Fig. 29.

$$d^2 = 2au,$$
$$v^2 = u(u + 2a),$$
$$w^2 = 2a(u + 2a).$$
$$\overline{v^2 + w^2 = (u + 2a)^2.}$$

Sätze vom rechtwinkligen Dreieck. Die Hypotenusenhöhe des rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.

Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der Hypotenuse selbst.

Das rechtwinklige Dreieck zerfällt durch die Hypotenusenhöhe in zwei andere rechtwinklige Dreiecke, welche unter sich und mit dem ursprünglichen Dreiecke ähnlich sind.

Der zuerst genannte Satz läfst sich sofort auf den Satz von der Potenz am Kreise zurückführen. Man beschreibe um das ursprüngliche Dreieck einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Hypotenusenmitte liegt. Auch der zweite Satz kann ebenso zurückgeführt werden, wenn man um die Teildreiecke Kreise beschreibt.

Der zweite Satz vom rechtwinkligen Dreieck wird in dem bekannten Euklidischen Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes geometrisch abgeleitet.

Der Höhenfufspunkt auf der Hypotenuse ist hiernach ein so merkwürdiger Punkt, dafs wir fragen dürfen:

24.

Findet sich auf der Seite BC des schiefwinkligen Dreiecks ABC ein Punkt D von der Eigenschaft, dafs man hat:

$$AD^2 = BD \cdot DC?$$

Wir setzen $CD = x$, also $DB = a - x$; $AD = y$. Dann wird:

$$y^2 = x(a - x), \qquad (1)$$

$$\cos\gamma = \frac{b^2 + x^2 - y^2}{2bx} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}. \qquad (2)$$

Hieraus leitet man ab:

$$2ax^2 - (2a^2 + b^2 - c^2)x = -ab^2. \qquad (3)$$

Ist die quadratische Gleichung gegeben:

$$x^2 + px = q,$$

so lautet die Auflösung:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

In unserem Falle ist $p = -\frac{2a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, $q = -\frac{b^2}{2}$. In der Auflösung erscheint der Nenner $4a$ und unter dem Wurzelzeichen der Ausdruck $4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 - 2b^2c^2$. Diesen Ausdruck erkennen wir als genau zusammenhangend mit der in Aufgabe 21 zuletzt gegebenen Inhaltsformel; er ist nichts anderes als das negative 16fache Inhaltsquadrat für das Dreieck, dessen Seiten $a\sqrt{2}$, b, c sind. Damit also unsere Aufgabe lösbar sei, darf dieses Dreieck nicht möglich sein. Weil nun $a + b - c$ und $a - b + c$ schon positive Gröfsen sind, so ist sicher $a\sqrt{2} + b > c$ und $a\sqrt{2} + c > b$. Also kann das Dreieck mit den Seiten $a\sqrt{2}$, b, c nur dann unmöglich werden, wenn man hat

$$b + c < a\sqrt{2}. \qquad (4)$$

Hiermit ist die Antwort auf unsere Frage erteilt. Sobald vorstehende Ungleichheit erfüllt ist, liefert die quadratische Gleichung (3) reelle Wurzeln, ist also der Punkt D auffindbar.

Wir behaupten nun weiter, dafs diese Bedingung immer erfüllt ist, wenn der Dreieckswinkel α stumpf ist. In diesem Falle ist $\cos\alpha$ negativ, also vermöge des Cosinussatzes

$$b^2 + c^2 < a^2. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Mag nun $b - c$ positiv oder negativ sein, immer ist $(b - c)^2$ positiv, also

$$b^2 + c^2 > 2bc. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Folglich ist um so mehr für ein bei A stumpfwinkliges Dreieck nach (5)

$$2bc < a^2. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Addiert man (5) und (7), so folgt

$$b^2 + 2bc + c^2 < 2a^2$$

oder, nach Ausziehung der Wurzel, Ungleichung (4).

Die vorstehenden Entwicklungen geben ein lehrreiches Beispiel für die Behandlung der Ungleichungen.

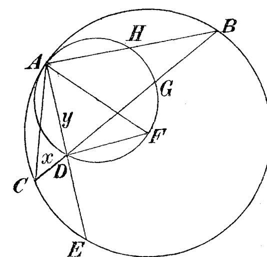


Fig. 30.

Beschreiben wir um das Dreieck ABC einen Kreis, so ist $DC \cdot DB$ Potenz dieses Kreises in Bezug auf den Punkt D. Verlängern wir daher AD bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise E, so mufs $DE = DA$ sein. Daher ergiebt sich geometrisch die

Lösung. Man beschreibe einen Kreis um das Dreieck ABC. Über dem Radius AF dieses Kreises als Durchmesser beschreibe man einen zweiten Kreis, welcher die Grundlinie BC des Dreiecks in den Punkten von der gesuchten Eigenschaft trifft.

Beweis. Da $DF \perp AE$, so ist $AD = DE$, folglich nach dem Satze von der Potenz am Kreise $DC \cdot DB = DA \cdot DE = DA^2$.

Einschränkung* *. Ist $\sphericalangle CAB$ stumpf, so schneidet BC den zweiten Hülfskreis immer, da F aufserhalb des Dreiecks ABC liegt, also AF von BC immer in einem auf der Strecke AF gelegenen Punkte geschnitten wird. Ist $\sphericalangle CAB = 90^0$, so ist aufser dem Höhenfufspunkt auch F ein Punkt von der verlangten Eigenschaft. Ist endlich $\sphericalangle CAB$ spitz, so wird die Aufgabe

* Vom Verfasser.

unlösbar, wenn BC den zweiten Hülfskreis nicht schneidet. Der Grenzfall findet statt, wenn BC diesen Kreis berührt. Nun ist allgemein $BH = HA = \frac{1}{2}c$, also $BG \cdot BD = \frac{1}{2}c^2$ und ebenso $CD \cdot CG = \frac{1}{2}b^2$. Für den Grenzfall liegt G auf D; also haben wir dann $BD^2 = \frac{1}{2}c^2$, $CD^2 = \frac{1}{2}b^2$, woraus sich endlich für $BD + CD = a$ ergiebt:

$$b + c = a\sqrt{2}.$$

Dies stimmt mit dem algebraischen Ergebnisse überein.

Fällt man vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne desselben eine Senkrechte, so trifft diese den Mittelpunkt der Sehne. Der Satz ist einer zweifachen Umkehrung fähig. Denn aus zwei Voraussetzungen, welche in den Begriffen „Mittelpunkt des Kreises“ und „Senkrechte zur Sehne“ enthalten sind, wird eine Folgerung „Mitte der Sehne“ gezogen. In logischem Schema lauten die drei Sätze: Das Bestehen von A und B zieht das Bestehen von C nach sich, und umgekehrt aus A und C folgt B, aus B und C folgt A.

Für ein stumpfwinkliges Dreieck liegt der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises aufserhalb der Dreiecksfläche, ebenso der Höhenpunkt. Diese beiden Punkte stehen in einem eigentümlichen Zusammenhange. Zieht man durch die Ecken des Dreiecks zu den Gegenseiten Parallele, so ist der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises für das zweite Dreieck der Höhenpunkt des ursprünglichen. Hierauf beruht der gewöhnliche Beweis für den Satz: Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Ein Beweis durch den Cevaschen Satz folgt aus Darstellung der Projektion durch Seite und Cosinus des Neigungswinkels. Ein dritter Beweis folgt durch Verbindung der Höhenfufspunkte.

Der kleine Kreis unserer Figur halbiert alle durch den Punkt A laufenden Sehnen des grofsen Kreises. Hieraus folgt die Lösung der Aufgabe: Durch den Punkt A eines Kreises soll eine Sehne gezogen werden, welche von einer zweiten gegebenen Sehne BC halbiert wird.

25.

Gegeben drei Kreise. Man sucht einen Punkt, von dem aus die an die drei Kreise gelegten Tangenten gleich grofs werden.

Vorbereitung. Wenn eine Aufgabe drei gleichartige Forderungen enthält, so besteht das sachgemäfse Lösungsverfahren

darin, dafs man zwei dieser Forderungen heraushebt und die so sich ergebende Bestimmung näher untersucht.

Wir fragen also in unserm Falle: Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, von denen an zwei gegebene Kreise gleiche Tangenten gezogen werden können?

Angenommen, der Kreis um A habe den Radius r, der um B den Radius ϱ. D sei ein Punkt gleicher Tangenten für beide Kreise, also $DE = DF$. Dann mufs sein:

$$DE^2 = DA^2 - r^2 = DC^2 + CA^2 - r^2;$$
$$DF^2 = DB^2 - \varrho^2 = DC^2 + CB^2 - \varrho^2;$$
$$CA^2 - CB^2 = r^2 - \varrho^2.$$

Die von D aus auf die Centrale gefällte Senkrechte trifft also die Centrale in einem solchen Teilpunkte, dafs die Differenz der Quadrate der Teilstücke die vorgeschriebene Gröfse $r^2 - \varrho^2$ besitzt. Ein solcher Teilpunkt ist nach Aufgabe 23 immer vorhanden, und zwar ist nur ein einziger solcher Punkt vorhanden. Aufserhalb dieser Senkrechten DC können also keine Punkte gleicher Tangenten liegen.

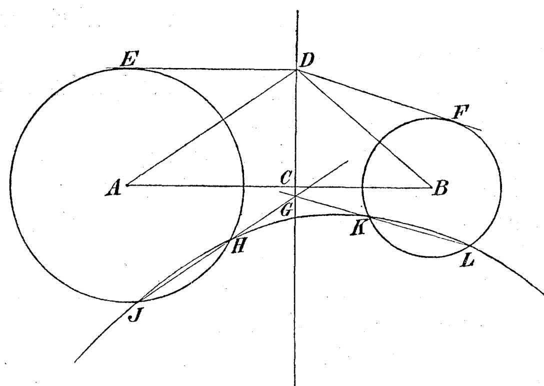


Fig. 31.

Andrerseits hat aber auch jeder Punkt dieser Geraden die fragliche Eigenschaft. Denn wenn

$$CA^2 - CB^2 = r^2 - \varrho^2,$$

so ist auch

$$CA^2 + CD^2 - r^2 = CB^2 + CD^2 - \varrho^2,$$

folglich auch $$AD^2 - r^2 = DB^2 - \varrho^2$$

oder $$ED^2 = DF^2.$$

Es ist wohl der Mühe wert, beide Schlufsketten recht ausführlich zu durchdenken, da erfahrungsmäfsig sich an dieser Stelle leicht logische Ungenauigkeiten einschleichen, trotz oder vielleicht wegen der Einfachheit des Gegenstandes.

Wir sind jetzt im stande, diese wichtige Linie DC zu zeichnen. Man nennt sie Radikalaxe, Potenzlinie, Linie der gleichen Tangenten u. s. w., auch Chordale, und diesen Namen wollen wir ebenfalls ihr beilegen. Wir ziehen einen willkürlichen Kreis, der die beiden gegebenen Kreise schneidet. Die gemeinsamen Sekanten JH und KL mögen sich in G treffen. Dann ist G ein Punkt der Chordale. Denn die von G an die beiden Kreise gelegten Tangenten sind gleich. Ihr Quadrat gleicht einerseits $GH \cdot GJ$ und andrerseits $GK \cdot GL$. Diese Gröſsen sind aber unter sich gleich. Nachdem G aufgefunden ist, fälle man von G auf AB ein Lot oder verbinde G mit einem zweiten Punkte G' derselben Art wie G. Zieht man an die beiden gegebenen Kreise zwei gemeinsame Tangenten und halbiert die zwischen den Berührungspunkten der Tangenten liegenden Stücke, so hat man auch zwei Punkte der Chordale.

Beschreibt man um D mit DE einen Kreis, so schneidet dieser die beiden gegebenen Kreise unter rechten Winkeln. Denn wenn zwei Kreise sich schneiden, so zieht man im Schnittpunkte an beide Kreise ihre Tangenten. Der Winkel, unter welchem die Tangenten sich schneiden, ist dann derjenige, unter welchem die Kreise sich schneiden. So schneiden die Mittagslinien die Breitenkreise unter rechten Winkeln und so begegnen sich die Mittagslinien am Nordpol auf der Erdkugel sämtlich unter demselben Winkel von 1^0.

Bisher haben wir den Fall zu Grunde gelegt, in welchem die beiden gegebenen Kreise getrennt liegen. Wenn sich dieselben schneiden, so gilt zwar wörtlich alles Frühere, aber man gelangt in diesem Falle doch weit einfacher zur Chordale. Sie ist nämlich nichts anderes als die gemeinsame Sekante der beiden Kreise.

Wenn der eine Kreis im andern liegt, so ist wieder die Chordale genau nach der durch die Figur dargestellten Methode zu bestimmen.

In den beiden Grenzfällen der umschlieſsenden oder ausschlieſsenden Berührung beider Kreise ist die gemeinsame Tangente, welche senkrecht zur Centrale steht, Chordale.

Wenn statt eines Kreises um B der Punkt B gegeben ist, so bleiben die algebraischen Entwicklungen wörtlich bestehen, wofern man nur $\varrho = 0$ setzt. Für die Sehne KL oder die Sekante GKL tritt die im Punkte B an einen willkürlich durch B gelegten Kreis gezogene Tangente ein.

Nunmehr können wir unsere Aufgabe sehr einfach lösen.

Lösung. Die drei gegebenen Kreise mögen der Reihe nach durch A, B, C bezeichnet werden. Man bestimme die Chordale der Kreise A und B, ebenso die Chordale der Kreise A und C. Der Schnittpunkt der Chordalen heiſse D. Dann ist D der gesuchte Punkt.

Beweis. Die von D an A und B gezogenen Tangenten sind gleich, weil D auf der Chordale der Kreise A, B liegt; die von D an A und C gelegten Tangenten sind gleich, weil D auf der Chordale von A und C liegt. Folglich sind alle sechs von D an die drei Kreise gelegten Tangenten einander gleich.

Einschränkung. Da in der Zeichnung nur gerade Linien, die Chordalen, sich schneiden sollen, so kann die Aufgabe niemals im eigentlichen Sinne unmöglich werden. Eigentliche Unmöglichkeit ist in der zeichnenden Geometrie dann vorhanden, wenn eine gerade Linie einen Kreis oder zwei Kreise sich gegenseitig nicht schneiden, obschon dies durch die Bedingungen der Aufgabe gefordert wird. Hängt die Lösung vom gegenseitigen Schneiden zweier Geraden ab, so kann die Lösung allenfalls entarten. In unserer Aufgabe tritt nun das eigentümliche Verhalten ein, daſs der Punkt D aufgefunden und dennoch die Aufgabe ihrem Wortlaute nach unerfüllbar sein kann. Dies Verhalten tritt ein, wenn A, B, C so liegen, daſs ein gewisses Stück ihrer Flächen den drei Kreisen gemeinsam ist.

Anmerkung. Die Chordalen von drei Kreisen A, B, C schneiden sich in einem Punkte, dem Potenzcentrum.

Unsere Aufgabe enthält zugleich die Lösung der nachstehenden:

Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet und durch zwei gegebene Punkte geht, u. s. w.

26.

Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise unter Durchmessern schneidet.

Wir lösen nach der gelegentlich Aufgabe 25 gemachten Bemerkung diese Aufgabe dadurch, daſs wir die Frage beantworten:

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise unter Durchmessern schneiden?

Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise seien A und B; diese Kreise mögen unter den Durchmessern CD und EF von

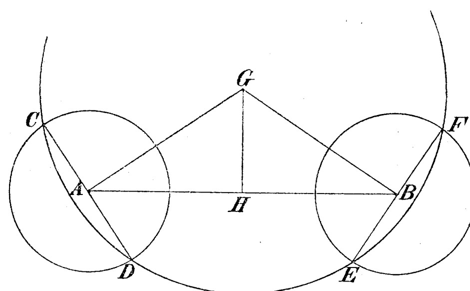


Fig. 32.

dem um G beschriebenen Kreise geschnitten werden. Fällen wir von G auf AB eine Senkrechte mit dem Fufspunkte H, so ist diese Senkrechte bestimmbar und löst die Aufgabe.

Beweis. Sei $CA = r$, $BF = \varrho$.

Es ist: $GC^2 = r^2 + AG^2 = r^2 + AH^2 + GH^2$,
$GF^2 = \varrho^2 + BG^2 = \varrho^2 + BH^2 + GH^2$;

daher: $AH^2 - BH^2 = \varrho^2 - r^2 = d^2$.

Folglich ist die Senkrechte GH bestimmbar, wie wir gelegentlich der Aufgabe 23 gesehen haben. Es erübrigt nun zu zeigen, dafs diese Senkrechte die Aufgabe löst. Zu diesem Zwecke verbinden wir einen willkürlichen Punkt G der Senkrechten mit A und B, errichten in diesen Punkten die zu den Verbindungslinien GA, GB senkrechten Diameter CD, EF und zeigen, dafs $GC = GF$ ist. Man hat:

$$AH^2 - BH^2 = \varrho^2 - r^2,$$

folglich auch:

$$AH^2 + r^2 + GH^2 = BH^2 + \varrho^2 + GH^2,$$

mithin: $GC^2 = GF^2$.

Ähnlich löst man die Aufgabe: Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte geht und einen Kreis halbiert; ferner: Einen Kreis zu beschreiben, der zwei Kreise rechtwinklig schneidet und einen dritten halbiert, u. s. w.

Die eigentliche Bedeutung der Aufgaben 25 und 26 tritt in der neueren Geometrie oder in der analytischen Geometrie hervor. Für die Anfangsgründe ist ihre Wichtigkeit zuweilen überschätzt worden.

27.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist $\beta, \gamma, h_a + t_b = s$.

Lösung. Man zeichne ein beliebiges Dreieck, welches aber die vorgeschriebenen Winkel β, γ enthält. Es ist dem gesuchten ähnlich. Man ziehe in diesem Hülfsdreieck die Höhe h'_a und die Mittellinie t'_b.

Dann folgt aus $\qquad h_a : h'_a = t_b : t'_b$
sofort $\qquad h_a : s = h'_a : (h'_a + t'_b)$.

Von den Schenkeln eines willkürlichen Winkels mache man den einen gleich $h'_a + t'_b$, den andern gleich s. Dann liefern zweckmäfsig gezogene Parallelen die Stücke h_a und t_b. Endlich vergröfsere oder verkleinere man durch eine zweckmäfsige Parallele das Hülfsdreieck in dem Mafse, dafs h'_a in das soeben gefundene h_a übergeht.

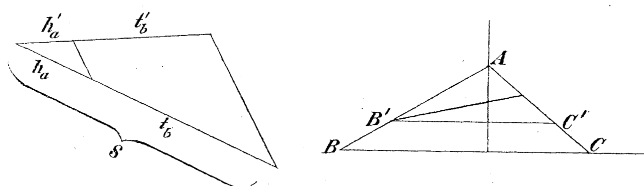


Fig. 33.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs in dem gewonnenen Dreiecke $h_a + t_b = s$ wird. Das gewonnene Dreieck ist dem Hülfsdreieck ähnlich. Bezeichnen wir die von B ausgehende Mittellinie durch t'', so ist

$$h'_a : h_a = t'_b : t''.$$

Nach der Nebenfigur ist

$$h'_a : h_a = t'_b : t_b.$$

Folglich ist $t'' = t_b$ und, wie die Nebenfigur zeigt, $h_a + t_b = s$.

Einschränkung. Die Aufgabe ist unter allen Umständen lösbar. Sind zwei ebene Figuren einander ähnlich, so kann man die eine als genaues Abbild der andern betrachten. Die entsprechenden Winkel sind einander gleich, die entsprechenden Seiten sind alle in demselben Mafse vergröfsert oder verkleinert. Heifsen die Seiten der einen a, b, c, ..., die der andern entsprechend a', b', c', ..., und ist $a = 7\,a'$, dann ist auch $b = 7\,b'$, $c = 7\,c'$, u. s. w. Gleiches gilt in dieser Beziehung von den Stücken des Umfangs wie von irgend zwei gleichliegenden Stücken. *In ähnlichen Figuren stehen irgend zwei gleichliegende Strecken in demselben Verhältnisse.*

Durch drei Glieder einer Verhältnisgleichung ist immer das vierte gegeben. Stimmen also zwei Verhältnisgleichungen in drei Gliedern entsprechend überein, so stimmen sie auch im vierten Gliede überein.

Zieht man in einem Dreiecke eine Parallele zur Grundlinie, so teilt sie die Seiten in verhältnisgleiche Stücke.

28.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, α, $b : c = m : n$.

Lösung. Von den Schenkeln eines Winkels α mache man den einen gleich m, den andern gleich n, nenne den Scheitelpunkt A, die Endpunkte B', C'. (Fig. 33.) Hierauf verlängere man $B'C'$ über C' hinaus, bis $B'D = a$ wird, ziehe $DC \parallel AB'$ und $CB \parallel B'C'$. ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist $BC \parallel B'C'$, also $b : c = m : n$;

$BC = a$, weil $BCB'D$ ein Parallelogramm.

Einschränkung. Die Aufgabe ist immer lösbar.
Eine zweite Lösung liefert der Apollonische Kreis. Vgl. Aufgabe 4.

29.

Ein Dreieck zu zeichnen aus α, $a + c = m$, $a + b = n$.

Lösung. Man zeichne ein Dreieck ADE, $AD = m$, $AE = n$, $\sphericalangle DAE = \alpha$. Hierauf mache man $DF = JE$, beschreibe mit FD um F einen Kreis und ziehe durch J zu DE eine Parallele, welche dem Kreise in G begegnet. Man ziehe DG, welches AE in C trifft und $BC \parallel FG$, welches AD in B trifft.

Fig. 34.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dafs $BC = BD = CE$ ist. DGC schlägt die Brücke.

Es ist einerseits $DG : DC = FG : BC,$

andrerseits $DG : DC = GH : CE,$

folglich $CE = BC.$

Ferner ist $DF : FG = 1 : 1 = DB : BC.$

Einschränkung. Eine eigentliche Lösung ist nur dann vorhanden, wenn der Punkt G innerhalb der Dreiecksfläche ADE angetroffen wird.

***Zweite Lösung**.** Man halbiere die Aufsenwinkel bei B und C, so findet man (Fig. 35) den Mittelpunkt des angeschriebenen Kreises. Diesen Mittelpunkt O verbinde man mit D und C. Alsdann ist der Winkel DOC bestimmbar. Wir gelangen zu folgender Zeichnung:

Man zeichne ein Dreieck ADE; $AD = m$, $AE = n$, $\sphericalangle DAE = \alpha$. Hierauf beschreibe man über DE als Sehne einen Kreisbogen, welcher einen Winkel $3\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ fafst, und halbiere den Winkel α bei A. Die Halbierungslinie treffe den Kreisbogen im Punkte O. Teilt man nun den Winkel DOE in drei gleiche Teile $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, so treffen die Teilungslinien AD und AE in den verlangten Punkten B, C.

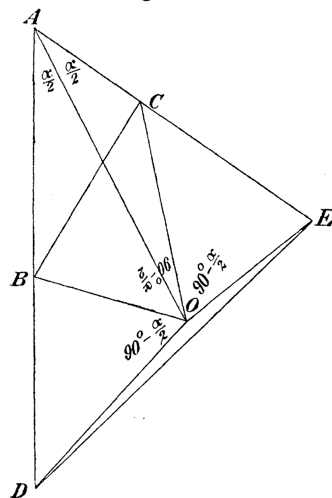


Fig. 35.

Beweis. Die Figur $ACOD$ ist ein Kreisviereck, da $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle COD = 180^0 - \alpha$. Nun stehen die gleichen Winkel $\frac{\alpha}{2}$ bei A über den Sehnen CO und DO, welche also gleich sein müssen. Folglich ist Dreieck $CBO \cong DBO$, also $BC = BD$. Mit Hülfe des Kreisvierecks $ABOE$ zeigen wir ebenso, dafs $BC = CE$.

Einschränkung. Weil von den beiden Punkten, in welchen der durch DOE gehende Kreis von AO getroffen wird, im allgemeinen nur einer die Eigenschaft hat, dafs $\sphericalangle DOE = 3\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$ ist, so bekommt man einen und nur einen solchen Punkt O. — Ist $\alpha = 60^0$, so wird $\sphericalangle DOE = 180^0$, also liegt in diesem Falle O auf der Linie DE. Ist $\alpha < 60^0$, so wird $\sphericalangle DOE > 180^0$, er ist folglich erhaben,

* Vom Verfasser.

und O liegt im Innern der Dreiecksfläche ADE. Ist $\alpha > 60^0$, so wird $\measuredangle DOE < 180^0$, der Punkt O liegt im Winkelraume ADE aufserhalb des Dreiecks ADE.

Sätze vom Kreisviereck, Aufgabe 11. Umkehrung des Satzes vom Peripheriewinkel, Aufgabe 11.

30.

Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

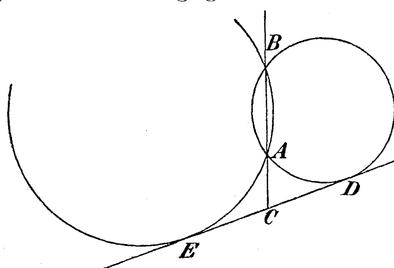


Fig. 36.

Lösung. Die Verbindungslinie der gegebenen Punkte AB schneide die gegebene Gerade L im Punkte C. Man bestimme m derartig, dafs $m^2 = CA \cdot CB$ wird, und mache $CE = CD = m$. Die durch die Punkte A, B, D und A, B, E gelegten Kreise lösen die Aufgabe.

Beweis. Angenommen, der durch B, A, D gelegte Kreis berühre nicht L. Dann mufs er L im Punkte D schneiden. Der mit D auf derselben Seite von C liegende Punkt, in welchem die Gerade L dem Kreise zum zweitenmal begegnet, sei D'. Dann ist

$$CA \cdot CB = m^2 = CD^2 = CD \cdot CD', \text{ also } CD = CD', \text{ w. u. i.}$$

Einschränkung. Im allgemeinen erhält man zwei Lösungen. Liegen die Punkte A, B auf verschiedenen Seiten der Geraden L, so ist die Aufgabe unlösbar. Liegt einer der beiden Punkte auf L, so erhalten wir nur eine Lösung. Ist die gerade Linie $AB \parallel L$, so entartet die eine Lösung zu einer Geraden, der Geraden AB, und auch in diesem Falle bleibt nur eine eigentliche Lösung. Es sind also nachstehende besondere Fälle zu behandeln:

Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen Punkt geht und eine Gerade in einem bestimmten Punkte berührt.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine der Verbindungslinie der Punkte parallele Gerade berührt.

Die Bestimmung der Strecke m bewirkt man durch den Satz vom rechtwinkligen Dreieck oder durch den Satz von der Potenz am Kreise. Letzteres ist in diesem Falle vorzuziehen.

Man lege durch die Punkte A, B einen willkürlichen Kreis und ziehe an diesen Kreis von C aus eine Tangente. Aufgabe 12. 23.

Zweite Lösung. Zu der Strecke AB errichten wir die Mittelsenkrechte, welche die gegebene Gerade L im Punkte C trifft. Auf derselben greifen wir den beliebigen Punkt D heraus, ziehen $DE \perp L$ und beschreiben mit DE um D einen Kreis. BC trifft diesen Kreis in F, $BG \parallel DF$ trifft CD im gesuchten Kreismittelpunkte.

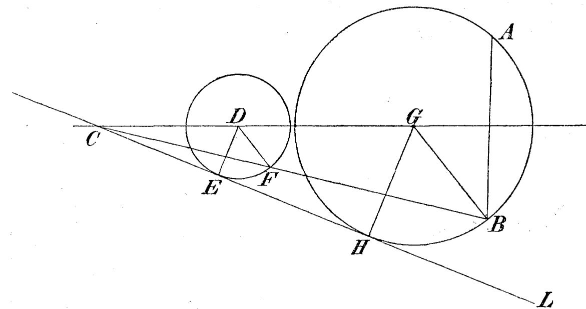


Fig. 37.

Beweis. Der mit GB beschriebene Kreis geht auch durch A. Es ist zu zeigen, dafs er L berührt. Wir fällen $GH \perp L$ und zeigen, dafs $GH = GB$. CDG schlägt die Brücke. Es ist

einerseits $\quad CD : CG = DE : GH,$

andrerseits $\quad CD : CG = DF : GB;$

folglich $\quad GB = GH$, da $DE = DF$.

Einschränkung. Da CB den Kreis um D in zwei Punkten schneidet, so erhalten wir im allgemeinen zwei Lösungen. Liegen A, B auf verschiedenen Seiten der Geraden, so ist keine Lösung vorhanden, weil kein Punkt F aufgefunden werden kann. Als besonderen Fall hat man die Aufgabe zu lösen:

Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte geht und eine zur Verbindungslinie der beiden Punkte senkrechte Gerade berührt.

Der Kreis um G erscheint genau als Abbildung des Kreises um D. Die Punkte E, H; F, B; ja D, G sind entsprechende Punkte. Der Punkt C heifst daher mit Recht Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Auch für den inneren Ähnlichkeitspunkt bleibt das Gesagte richtig. Vgl. Aufgabe 3.

Dritte Lösung. Wir können unsere Aufgabe algebraisch angreifen, und zwar wollen wir folgende Fragen beantworten:

1. Wie läfst es sich algebraisch ausdrücken, dafs der Mittelpunkt unseres gesuchten Kreises von der gegebenen Geraden L und von dem festen Punkte A gleichen Abstand hat?

2. Wie läſst es sich algebraisch (durch eine Gleichung) ausdrücken, daſs der gesuchte Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von AB, also auf einer gewissen Geraden liegt?

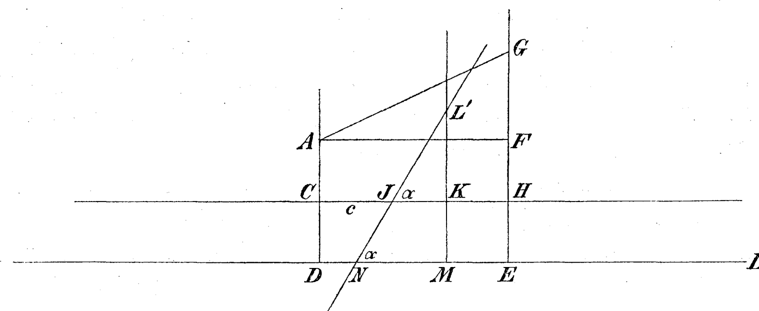


Fig. 38.

Wir fällen $AD \perp L$, machen $AC = CD$, ziehen $CH \parallel L$. Nun setzen wir $CH = y$, $GH = x$; dann ist $AG = GE = x + HE$, $GF = x - FH$. Ferner setzen wir: $AD = p$, also $HE = FH = \frac{p}{2}$ und aus dem rechtwinkligen Dreiecke AGF ergiebt sich:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Hieraus folgt $$y^2 = 2px. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hiermit ist die erste Frage beantwortet. Die Antwort fällt unbestimmt aus, wie zu erwarten war. Zu jedem beliebig angenommenen Werte x gehören zwei bestimmte Werte von y, welche entgegengesetzt gleich sind; zu jedem beliebig angenommenen Werte von y gehört ein einziger Wert von x. Läſst man y alle möglichen Gröſsen annehmen und bestimmt die dazu gehörigen Werte von x durch Gleichung (1), so erhält man unendlich viele, ja alle zulässigen Punkte G von der verlangten Beschaffenheit. Ihre Gesamtheit bildet eine krumme Linie, die Parabel. Sie ist nicht geschlossen und besteht aus einem einzigen Zuge. Sie ist in der Physik als Wurflinie bekannt, in der Optik findet der parabolische Hohlspiegel Erwähnung.

Jetzt soll ausgedrückt werden, daſs der fragliche Punkt einer gewissen geraden Linie angehört. Diese Gerade ist durch zwei Angaben bestimmt, etwa durch den Winkel α, unter welchem sie die Axe der Y (CH) schneidet, und durch den Abschnitt CJ, den sie auf dieser Axe bestimmt. L' sei ein beliebiger Punkt dieser Geraden.

Wir setzen $CK = y'$, $KL' = x'$.

Dann wird
$$\frac{x'}{y' - c} = tg\,\alpha. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Aus dieser Gleichung kann man dadurch, dafs man zu allen möglichen Werten von x' die zugehörigen Werte von y' bestimmt und dann die gefundenen Paare x', y' in die Figur einträgt, zu allen Punkten unserer Geraden gelangen. Wir haben die Gleichung der geraden Linie vor uns.

Jetzt ist die Lösung unserer Aufgabe einfach. Damit der Punkt G unserer Aufgabe genüge, müssen die ihn bestimmenden Werte x, y beiden Gleichungen (1) und (2) genügen, und umgekehrt: genügen diese Werte, die Koordinaten des Punktes G, den beiden Gleichungen (1) und (2), so hat G die verlangte Eigenschaft. Es mufs also sein:
$$y^2 = 2px,$$
$$\frac{x}{y - c} = tg\,\alpha.$$
Hieraus folgt:
$$y^2 - 2py\,tg\,\alpha + 2pc\,tg\,\alpha = 0\,. \quad \ldots \quad (3)$$

Die weitere Erörterung dieser Gleichung würde alle Eigenschaften und Sätze darlegen, welche bei Betrachtung einer geraden Linie und einer Parabel nur auftreten können. Solche Untersuchungen stellt die analytische Geometrie an. Hier sei nur eins erwähnt. Im allgemeinen liefert Gleichung (3) zwei verschiedene Werte für y, also auch für x. Daher schneidet eine Gerade eine Parabel im allgemeinen in zwei verschiedenen Punkten. Dagegen liefert (3) nur einen Wert, wenn
$$tg\,\alpha = \frac{2c}{p}.$$
Man sieht, dafs dies der Fall ist, wenn $AJ \perp JL'$, da $AC = \frac{p}{2}$. In diesem Falle liefert also JL' nur einen oder richtiger zwei zusammenfallende Schnittpunkte mit der Parabel, JL' ist Tangente der Parabel. Bewegt sich also ein rechter Winkel so, dafs sein Scheitelpunkt auf einer Geraden CH fortrückt, während der eine Schenkel immer durch den festen Punkt A geht, so berührt der andere Schenkel fortwährend eine Parabel. A heifst Brennpunkt, L Leitlinie der Parabel; C ist ihr Scheitel, CA ihre Axe und CH Scheiteltangente.

31.

Man löse durch Zeichnung die Gleichung $x^2 + px = q$.

Da x eine Strecke bedeutet, so ist x^2 ein Quadrat, px ein Rechteck und q ebenfalls ein Rechteck, welches wir in ein Quadrat verwandelt denken.

Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden:

$$1)\ x^2 + ax = b^2,$$
$$2)\ x^2 - ax = b^2,$$
$$3)\ x^2 - ax = -b^2.$$

1. Wir beschreiben einen Kreis, dessen Durchmesser a sei, ziehen eine Tangente an den Kreis und tragen auf derselben vom Berührungspunkte aus die Strecke b ab. Den äufsern Endpunkt verbinden wir mit dem Mittelpunkte des Kreises. Der äufsere Abschnitt der Sekante ist x.

2. Wir machen dieselbe Zeichnung. Die ganze Sekante ist x.

3. Wir beschreiben einen Kreis, dessen Durchmesser a sei und ziehen zum Durchmesser im Abstande b eine Parallele. Von dem einen Schnittpunkte des Kreises mit der Parallelen fällen wir auf den Durchmesser eine Senkrechte. Jedes der Teilstücke des Durchmessers ist x.

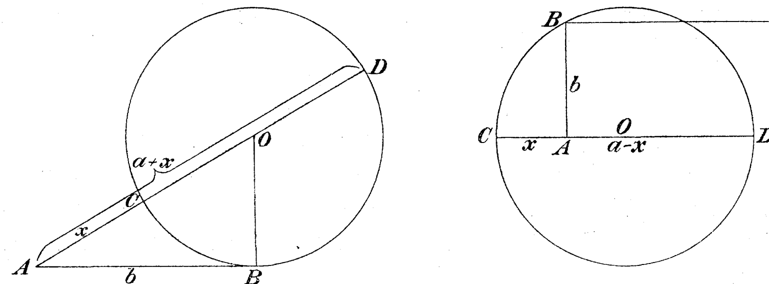


Fig. 39.

Beweis für 1) und 3). Es ist $AC \cdot AD = AB^2$ nach dem Satze von der Potenz am Kreise oder nach dem Satze vom rechtwinkligen Dreieck. Daher erhält man in den beiden Fällen bezüglich:

$$x(x + a) = b^2,$$
$$x(a - x) = b^2.$$

Hiermit ist der Beweis geliefert. Die Strecke x genügt den obigen Gleichungen.

Einschränkung. Im Falle 1) und 2) ist die Aufgabe stets lösbar. Im Falle 3) ist die Aufgabe nur dann lösbar, wenn $b \leqq \frac{a}{2}$. Man findet für AO im Falle 1) und 2) den Wert

$\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$, im Falle 3) dagegen $\sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, und so ergiebt sich der algebraische Ausdruck:

$$\text{im Falle 1)} \quad \ldots \quad x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}},$$

$$\text{im Falle 2)} \quad \ldots \quad x = \frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}},$$

$$\text{im Falle 3)} \quad \ldots \quad x_1 = \frac{a}{2} - \sqrt{-b^2 + \frac{a^2}{4}},$$

$$x_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{-b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Diese Auflösungen der quadratischen Gleichung waren den griechischen Mathematikern bekannt. Die Erkenntnis, dafs die betrachteten Fälle nur Besonderheiten der allgemeinen Auflösung:

$$x^2 + px = q,$$

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},$$

sind, war keineswegs so naheliegend, wie es wohl scheinen mag. Die Wissenschaft verdankt diesen gewaltigen Fortschritt den Indern.

Es erscheint auffallend, dafs in den Fällen 1) und 2) die quadratische Gleichung nur eine Lösung darbietet. Wenn x eine Mittellinie, einen Winkelhalbierer, eine Höhe, eine Dreiecksseite u. s. w. bedeuten soll, so hat in der That die für den ersten Fall gefundene Lösung:

$$x = -\frac{a}{2} - \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = -AD,$$

gar keinen Sinn, und man mufs sie als unbrauchbar verwerfen. Wenn aber x die Koordinate eines Punktes ist, so hat x sofort auch mit negativem Zeichen einen geometrischen Sinn. Man hätte alsdann die Strecke AD in der der angenommenen Zählung entgegengesetzten Richtung abzutragen. In Fig. 38 zählen wir die x nach oben hin. Negative x wären nach unten zu zählen.

32.

Man zeichne ein Rechteck, welches bei gegebenem Umfange einen möglichst grofsen Inhalt hat.

Vorbereitung. Der Umfang sei $2a$. Der halbe Umfang ist dann a, also die Breite $a - x$, wenn die Länge x beträgt. Die zu lösende Voraufgabe verlangt also, dafs dieses Rechteck den vorgeschriebenen Inhalt b^2 habe. Wir erhalten somit die Gleichung:

$$x(a - x) = b^2.$$

Die vorige Aufgabe zeigte uns als Grenzfall $b = \frac{a}{2}$. Daher die

Lösung: Das gröfste Rechteck ist ein Quadrat mit der Seite $\frac{a}{2}$.

Beweis. Beschreibt man über der Strecke a als Durchmesser einen Kreis (Fig. 39), so erscheint als Inhalt des aus den Stücken AC und AD als Seiten gebildeten Rechtecks das Quadrat über der Strecke AB. Nun ist $AB < BO = \frac{a}{2}$, w. z. b. w.

Eine berühmte Aufgabe ähnlicher Art ist die Teilung nach dem goldenen Schnitt. Sie verlangt, dafs eine Strecke a so in zwei Stücke x und $a - x$ zerlegt werde, dafs sich verhalte

$$(a - x) : x = x : a.$$

Die Auflösung dieser Verhältnisgleichung ergiebt:

$$x^2 = a(a - x),$$

$$x^2 + ax = a^2. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die geometrische Lösung ist in der vorigen Aufgabe 31 enthalten. Konstruiert man ein Dreieck aus den Seiten a, a, x, so wird der x gegenüberliegende Winkel, wie gezeigt werden kann, 36^0, die beiden anderen je 72^0. Nun wird nach dem Cosinussatze

$$\cos 36^0 = \frac{2a^2 - x^2}{2a}, \quad \cos 72^0 = \frac{x}{2a}.$$

Es ergiebt sich aber aus Gleichung (1)

$$x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

und hier hat der negative Wurzelwert, weil x eine Dreiecksseite sein soll, keinen Sinn. Wir finden durch Einsetzung dieses Wertes

$$\cos 72^0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos 36^0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, ein regelmäfsiges Zehneck zu zeichnen. Es ist unmöglich, eine Strecke nach dem goldenen Schnitte so zu teilen, dafs die Teilstücke rationale Zahlen sind. Denn $\sqrt{5}$ ist eine irrationale Zahl. Dagegen liefert der unendliche Kettenbruch, dessen sämtliche Teilnenner den Wert 1 haben, in jedem seiner Näherungsbrüche

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13} \text{ u. s. w.}$$

eine angenäherte Teilung nach dem goldenen Schnitt. Es ist annähernd $5 : 8 = 8 : 13$ u. s. w.

Hierauf beruht der bekannte Scherzbeweis, dafs $65 = 64$; (geschickte Zerschneidung eines Papiers mit 64 Feldern).

33.

Man teile eine Strecke a so, dafs die Summe der Quadrate der Teilstücke eine vorgeschriebene Gröfse erhält.

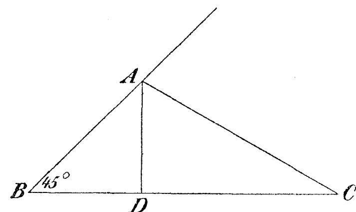


Fig. 40.

Lösung. $BC = a$; $\measuredangle ABC = 45^0$; um C ist mit der Strecke m ein Kreis beschrieben, der den freien Schenkel des Winkels von 45^0 im Punkte A trifft. $AD \perp BC$ löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist $AD = BD$, $BD^2 + DC^2 = AD^2 + DC^2 = m^2$.

Einschränkung. Damit die Lösung möglich sei, mufs $m\sqrt{2} \geqq a$ sein; m mufs gröfser, mindestens gleich der von C auf BA gefällten Senkrechten sein. Man erhält zwei verschiedene Teilpunkte D, aber nicht wesentlich verschiedene Teilung der Strecke a. Ist $m = a$, so ist das eine Teilstück Null. Ist $m > a$, so liegt der Teilpunkt D aufserhalb der Strecke auf der Geraden BC.

Zweite Lösung. Wir nennen das eine Teilstück x, dann heifst das andere $a - x$. Die Zählung (Abtragung der Strecke x) geschehe von B aus. Dann haben wir die Gleichung:

$$x^2 + (a-x)^2 = m^2,$$

$$x^2 - ax = \frac{m^2 - a^2}{2}.$$

Jetzt haben wir, wenn wir rein geometrisch vorgehen, zwei Fälle zu unterscheiden, $m > a$ und $m < a$. Im ersteren Falle setzen wir

$$(m - a)\,\frac{m + a}{2} = b^2$$

und konstruieren b mit Hülfe des Satzes vom rechtwinkligen Dreieck, indem wir über einer Strecke von der Gröfse

$$m - a + \frac{m + a}{2}$$

einen Halbkreis beschreiben und in dem durch diese beiden Teilstücke bestimmten Punkte eine Senkrechte errichten. Dann haben wir Fall 2 der Aufgabe 31 vor uns. — Ist dagegen $m < a$, so setzen wir

$$(a - m)\,\frac{a + m}{2} = b^2,$$

konstruieren b und haben dann den Fall 3 der Aufgabe 31 vor uns.

Bei algebraischem Vorgehen brauchen wir diese Unterscheidung zunächst nicht zu machen.

Wir finden $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{2m^2 - a^2}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{2m^2 - a^2}}{2}$.

Die Aufgabe wird unlösbar, wenn $m\sqrt{2} < a$. Ist $m < a$, so ist $2m^2 - a^2 < a^2$ und darum $\sqrt{2m^2 - a^2} < a$, also sind in diesem Falle beide Werte x positiv. Ist $m > a$, so ist eine Wurzel x unserer Gleichung positiv, die andere negativ. Der negative Wert hat in diesem Falle geometrischen Sinn, da es sich um eine in bestimmter Richtung abzutragende Strecke handelt. Die beiden Wurzeln sind in jedem Falle nichts anderes als die beiden Teilstücke der Strecke, nämlich:

$$x = \frac{a + \sqrt{2m^2 - a^2}}{2}, \quad a - x = \frac{a - \sqrt{2m^2 - a^2}}{2}.$$

An diese Aufgabe kann man die Minimalaufgabe schliefsen:

Eine gegebene Strecke so zu teilen, dafs die Summe der Quadrate der Teilstücke ein Minimum sei.

Lösung. Die Strecke ist zu halbieren.

Beweis. Man fälle (Fig. 40) von C aus auf AB eine Senkrechte; sie ist kleiner als AC. Halbiert man a, so ist die Summe der Quadrate der Teilstücke gleich dem Quadrate der Senkrechten, dagegen gleich AC^2 für den beliebigen Teilpunkt D.

Zieht man in einem Quadrate eine Diagonale, so erhält man Winkel von 45^0. Ist die Seite des Quadrates 1, so wird die Diagonale $\sqrt{2}$. Dies ist eine irrationale Zahl. Denn angenommen, $\sqrt{2}$ sei ein rationaler Bruch, so müfste eine der drei Gleichungen bestehen:

$$\sqrt{2} = \frac{2h}{2k+1}, \quad \sqrt{2} = \frac{2h+1}{2k}, \quad \sqrt{2} = \frac{2h+1}{2k+1},$$

wo h und k ganze Zahlen sind. Denn Zähler und Nenner müssen entweder beide ungerade oder der eine gerade, der andere ungerade sein. Wären beide gerade, so könnte man durch 2 abkürzen und würde dann doch schliefslich auf eine der obigen drei Annahmen stofsen. Alle drei Annahmen sind aber unzulässig. Denn quadriert man, so ergiebt die erste

$$(2k+1)^2 = 2h^2,$$

d. h. eine ungerade Zahl soll gleich einer geraden sein, w. u. i. Ebenso zeigt man die Unzulässigkeit der beiden anderen Annahmen. $\sqrt{2}$ ist also nicht durch einen Bruch genau auszudrücken und folglich eine irrationale Zahl. Mit anderen Worten: Die Seite und die Diagonale eines Quadrates sind inkommensurable Gröfsen.

Dasselbe gilt, wie man am besten gelegentlich der Ketten-

brüche zeigt, für jede Wurzel aus einer ganzen Zahl, die nicht wieder eine ganze Zahl ist. Wollte man für $\sqrt{3}$ das obige Verfahren anwenden, so hätte man schon acht Fälle zu unterscheiden, da Zähler und Nenner die drei Formen $3h$, $3h+1$, $3h+2$ haben können.

$\sqrt{3}$ zeichnet man mit Hülfe des gleichseitigen Dreiecks. Ist die Seite desselben 1, so ist die doppelte Höhe $\sqrt{3}$. Es ist $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\sqrt{5}$ erhielten wir durch das reguläre Zehneck.

Die Beziehung der $\sqrt{p}$ zur Kreisteilung durch p ist auch allgemein vorhanden.

Man zeichnet $\sqrt{n}$ mit Hülfe des Satzes vom rechtwinkligen Dreieck, indem man über einer Strecke $1+n$ einen Halbkreis beschreibt und im Teilpunkte eine Senkrechte errichtet. Übrigens kann man auch nach vielen anderen Methoden verfahren, da jede Zerfällung der Zahl n in zwei Faktoren oder in die Summe zweier Quadrate oder die Darstellung von n als Differenz zweier Quadrate eine Lösung der Aufgabe darbietet.

34.

Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Gerade zu ziehen, so dafs die Summe der beiden abgeschnittenen Sehnen eine vorgeschriebene Gröfse *m* erhält.

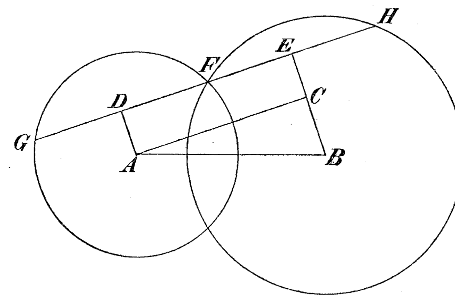


Fig. 41.

Lösung. Über der Centrale AB beschreibe man einen Halbkreis. Ein um A mit der Hälfte der gegebenen Strecke beschriebener Kreis treffe den Halbkreis in C. Durch den Schnittpunkt F der beiden Kreise ziehen wir $GH \parallel AC$. GH löst die Aufgabe.

Beweis. Wir verlängern BC bis zum Schnittpunkte E mit GH, dann ist $BE \perp GH$; ebenso sei $AD \perp GH$. Dann ist $GD = DF$, $FE = EH$, $DF + FE = \frac{m}{2}$, $GD + EH = \frac{m}{2}$, $GH = m$.

Einschränkung. $\frac{m}{2}$ mufs kleiner, darf höchstens gleich AB sein. Geht GH durch das beiden Kreisflächen gemeinsame Stück, so wird die Lösung uneigentlich.

Sätze siehe Aufgabe 24, 11.

Hieran schliefst sich die Maximalaufgabe: Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Gerade zu ziehen, so dafs die Summe der abgeschnittenen Sehnen möglichst grofs werde.

Lösung. Man ziehe durch F, den Schnittpunkt der beiden Kreise, eine Parallele zur Centrale AB.

Beweis. Zieht man durch F eine zweite Sekante GH und nun von A und B auf beide Sekanten Senkrechte, so ist das zwischen den Fufspunkten dieser Senkrechten enthaltene Stück jedesmal die Hälfte der ganzen Sekante. Dieses Stück ist in dem einen Falle gleich AB, in dem andern gleich AC, es ist aber $AB > AC$.

Durch die vorstehend gelöste Aufgabe kann man die Lösung einer Reihe anderer Aufgaben bewirken. Wir wollen einige derselben hier aufführen.

Gegeben zwei Dreiecke. Man soll das eine so um das andere beschreiben, dafs die Ecken des letztern auf den Seiten des erstern liegen.

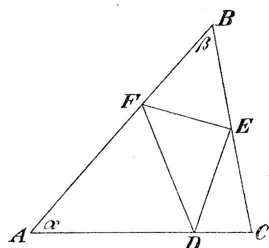


Fig. 42.

Lösung. Man beschreibe über den Seiten FE und FD Kreise, welche die Winkel α und β des andern Dreiecks fassen, und ziehe durch den einen Schnittpunkt F dieser Kreise eine Gerade so, dafs das von beiden Peripherien begrenzte Stück gleich der Dreiecksseite AB sei. Dann verbinde man A mit D, B mit E. ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Dreieck ABC ist dem ursprünglich gegebenen Dreiecke kongruent, da es in der Seite AB und den beiden Winkeln α und β mit ihm übereinstimmt.

Einschränkung. Die Hülfsaufgabe darf nicht unlösbar werden.

Hieran schliefst sich die Aufgabe: Um ein gegebenes Dreieck ein anderes mit vorgeschriebenen Winkeln beschreiben, dessen Inhalt ein Maximum sei.

Lösung. Das gegebene Dreieck sei ABC. (Fig. 43.) Wir beschreiben über BC einen Bogen, der den gegebenen Winkel δ, über AC einen Bogen, der den gegebenen Winkel ε fafst. Alsdann ziehen wir die Centrale dieser beiden Kreise und durch den Punkt C eine Parallele zur Centrale. — Die Richtigkeit dieser Lösung folgt aus dem oben Gesagten. Allein es bleibt doch eine Schwierigkeit. Man könnte nämlich auch über AB einen Bogen beschreiben, der den

dritten Winkel ζ faſst, und nun durch B und A ebenso eine Maximallösung gewinnen wie vorhin durch C. Es wäre dann zu untersuchen, welches von den drei Maximis das Maximum maximorum wäre. Allein dem ist nicht so; die drei genannten Verfahrungsweisen liefern dasselbe Dreieck.

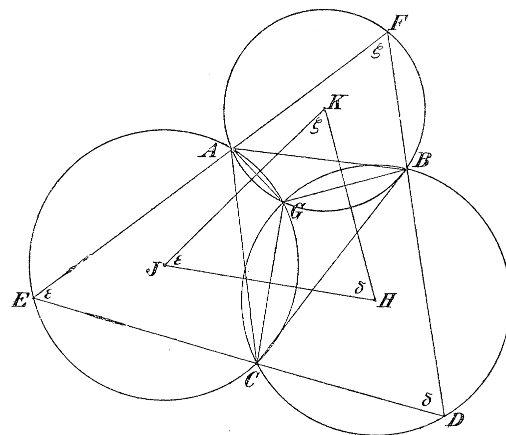


Fig. 43.

Beweis. Dreieck DEF mit den Winkeln δ, ε, ζ sei dem Dreiecke ABC umschrieben. Die um die Dreiecke DCB, EAC und FAB beschriebenen Kreise haben die Mittelpunkte H, J, K. Die Kreise um H und J schneiden sich auſser in C in G. Dann ist $\sphericalangle AGC = 180^0 - \varepsilon$, $\sphericalangle CGB = 180^0 - \delta$; folglich bleibt für $\sphericalangle AGB$, da $\delta + \varepsilon + \zeta = 180^0$, $\sphericalangle AGB = 180^0 - \zeta$. Mithin ist $AGBF$ ein Kreisviereck. Man kann dies Ergebnis als Satz so aussprechen: Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks als Sehnen Kreisbogen, welche drei Winkel fassen, so schneiden sich die drei Kreise in einem Punkte, wenn die Summe der drei Winkel 180^0 beträgt.

Da nun $AG \perp JK$, $GC \perp JH$, $GB \perp KH$, so haben die Winkel bei J, H, K die in der Figur bezeichneten Werte. Zieht man nun durch C zu JH eine Parallele, so entsteht das gröſste dem Dreieck JKH ähnliche Dreieck, welches ABC umschrieben ist. Seine Seiten werden daher alle den Seiten von JKH parallel.

Der Inhalt des gröſsten Dreiecks ist viermal so groſs als der des Dreiecks JHK. Denn:

Die Inhalte zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich am besten auf die Formel $J = \frac{1}{2} ah$ und den in Aufgabe 27 verwendeten Satz.

Man erhält aus der obigen Aufgabe zahlreiche andere:

Um ein gegebenes Dreieck ein gleichseitiges mit vorgeschriebener Seite zu beschreiben.

Um ein gegebenes Dreieck das gröſste rechtwinklig-gleichschenklige zu beschreiben u. s. w.

35.

Um ein gegebenes Quadrat ein zweites gleichfalls gegebenes zu beschreiben.

Lösung. Man beschreibe über den Seiten AB und AD des erstern als Durchmessern zwei Halbkreise. Hierauf beschreibe man um den Pfeilpunkt des Halbkreises über AB einen durch A und B laufenden Kreis. Derselbe fafst 45^0. In diesen Kreis lege man die Sehne $AF = b$, ziehe EB, GD und durch C endlich $HJ \parallel AE$. $GHJE$ ist das umschriebene Quadrat mit der Seite b.

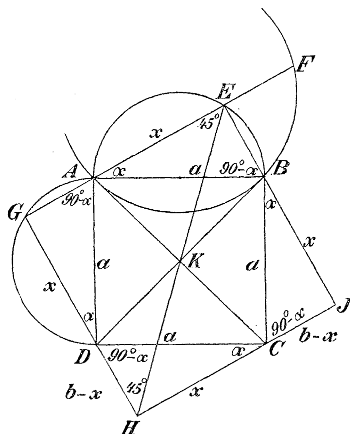


Fig. 44.

Beweis. Da $\measuredangle\, EFB = 45^0$ (vgl. Aufgabe 15), so ist $EF = EB$, also $AE + EB = b$. Jetzt kann man in die Winkel diejenigen Bezeichnungen schreiben, welche unsere Figur aufzeigt. Die vier Aufsendreiecke sind also kongruent, also $GA = EB = CJ = DH$, und ebenso $GD = AE = BJ = HC$. Die Seiten der Figur $GEJH$ sind also einander gleich, ihre Winkel rechte und $GA + AE = EF + AE = b$.

Einschränkung. b mufs gröfser als a sein, wenn eine eigentliche Lösung erhalten werden soll. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn b gröfser als der Durchmesser des Hülfskreises ABF wird. Dieser ist $a\sqrt{2}$; also:

$$a < b < a\sqrt{2}.$$

Zweite Lösung. Wir dürfen setzen:

$$x = GD = HC = BJ = AE;$$
$$b - x = AG = DH = CJ = EB.$$

Daher die Gleichung:

$$x^2 + (b - x)^2 = a^2,$$
$$x^2 - bx = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Diese Gleichung ist bereits Aufgabe 33 behandelt worden.

Dritte Lösung. Man ziehe nach Anleitung von Aufgabe 34 durch den Schnittpunkt A der beiden Halbkreise eine Sehne $GE = b$, verbinde G mit D, E mit B, ziehe durch C schliefslich $HJ \parallel GE$.

Beweis. $GEJH$ ist ein Rechteck. Die Winkelberechnung zeigt, dafs die Aufsendreiecke kongruent sind.

Vierte Lösung *. Eine Figur hat einen Mittelpunkt, wenn alle innerhalb der Figur liegenden Stücke der durch den Punkt gehenden Geraden durch diesen Punkt halbiert werden. Ein Kreis hat einen Mittelpunkt, nicht aber ein Dreieck. Jedes Parallelogramm aber hat einen Mittelpunkt, folglich auch das Quadrat.

Man beschreibe um den Mittelpunkt des kleineren Quadrates K mit der halben Diagonale des gröfseren einen Kreis, welcher dem über AB stehenden Halbkreise in E begegnet, mache $KH = KE$, ziehe HD, EA, HC, EB.

Beweis. $AKBE$ ist ein Kreisviereck, denn die Winkel bei E und K sind rechte. Nun ist $KA = KB$, folglich halbiert KE den rechten Winkel (Peripheriewinkel) bei E. Es ist ferner Dreieck $KDH \cong KBE$, da $KD = KB$ ist, mithin auch $\measuredangle KHD = KEB = 45^0$, $EG = GH$ u. s. w.

Einschränkung wie oben.

36.

Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt, letztere in einem gegebenen Punkte.

Fig. 45.

Lösung. Man beschreibe einen übrigens willkürlichen Kreis, der die gegebene Gerade L in dem gegebenen Punkte A berührt und den um B beschriebenen gegebenen Kreis in den Punkten C, D schneidet. CD treffe L in E; man ziehe von E aus an den gegebenen Kreis Tangenten mit den Berührungspunkten F und G. Dann liegt der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf BF und der in A auf L stehenden Senkrechten. BG liefert ebenso eine Lösung.

---

* Vom Verfasser.

Beweis. Es ist $EA^2 = ED \cdot EC = EF^2$. Folglich $EFH \cong EAH$, also $AH = HF$.

Einschränkung. Man erhält im allgemeinen zwei Lösungen. Als besonderer Fall ist zu behandeln: Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt, letztere im Fufspunkte der auf sie vom Mittelpunkte des Kreises gefällten Senkrechten.

Bezüglich der Sätze vgl. Aufgabe 12. Der Kreis um B schneidet ein Kreisbüschel, dessen gemeinsame Punkte in A zusammenfallen.

Zweite Lösung. Bei Berührungsaufgaben ist es oft zweckmäfsig, in einem berührenden Kreise die Berührungssehne zu ziehen. Man fälle von B, dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises, auf L eine Senkrechte mit dem Fufspunkte D. Dieselbe möge den Kreis in C schneiden. Man verbinde C mit dem gegebenen Punkte A, AC möge den gegebenen Kreis im Punkte F schneiden. Dann trifft BF die in A auf L errichtete Senkrechte im Punkte H, dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises.

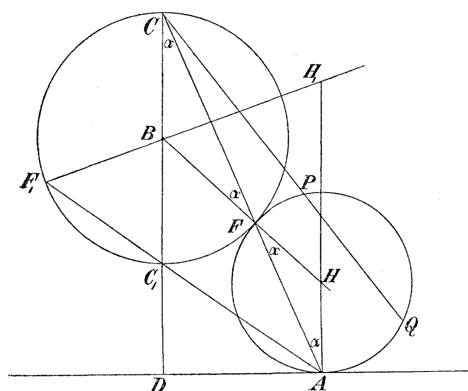


Fig. 46.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $FH = HA$ ist. Die Bezeichnung α ist in den betreffenden Winkel bei C willkürlich geschrieben. Dann ist sie bei A berechtigt, weil $CD \parallel AH$. Sie ist bei F berechtigt, weil $BF = BC$, und weil Scheitelwinkel vorhanden sind. Folglich ist Dreieck FAH gleichschenklig.

Einschränkung. Da BD den Kreis um B zweimal schneidet, so ergiebt sich eine zweite Lösung durch den zweiten Schnittpunkt C_1.

Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten, so sind die entsprechenden Winkel und die Wechselwinkel einander gleich, je ein Paar Gegenwinkel ergänzen sich zu 180^0.

Zwei Kreise berühren einander, wenn ihre Centrale gleich der Summe oder Differenz ihrer Radien ist.

Dritte Lösung. Sei $BF = r$, $BD = a$, $FH = x$. Man ziehe durch H eine Parallele zu $DA = c$. Dann ist:

$$(x + r)^2 = c^2 + (a - x)^2,$$
$$2x(r + a) = a^2 + c^2 - r^2.$$

Dies ist eine leicht durch Zeichnung auflösbare Gleichung ersten Grades. Vgl. Aufgabe 23. Zieht man von D aus an den Kreis um B eine Tangente, so ist deren Quadrat $a^2 - r^2$. Trägt man die Länge der Tangente von D aus auf DC ab, so erhält man in der Verbindung des Endpunktes mit A eine Strecke, deren Quadrat $a^2 - r^2 + c^2$ ist.

Dafs wir eine Gleichung ersten Grades erhalten und nicht eine solche zweiten Grades, ist in hohem Grade bemerkenswert. Es zeigt uns, dafs die beiden oben gefundenen zwei Lösungskreise nicht ihrem Wesen nach zusammenhangen. Die zweite Lösungsmethode liefs diesen Unterschied entschiedener hervortreten als die erste. Wir kommen indes auf diesen Gegenstand zurück. Der Radius x des zweiten Lösungskreises folgt aus der Gleichung $2x(a - r) = a^2 + c^2 - r^2$.

Die Fig. 46 bringt einen sehr wichtigen Satz zur Anschauung. Es ist $CFC_1 \sim CDA$, daher

$$CC_1 \cdot CD = CF \cdot CA \cdot = const.$$

Dieser Satz heifst der erste Satz von der Inversion oder von den potenzhaltenden Punkten. Wir wollen ihn den ersten Satz von der umgekehrten Abbildung nennen.

Seine Form zeigt Ähnlichkeit mit dem Satze von der Potenz am Kreise. Der Kreis darf als Abbildung der Geraden DA und umgekehrt gelten, weil jedem Punkte der Geraden ein Punkt der Kreisperipherie entspricht und umgekehrt. C heifst Ähnlichkeitspunkt; umgekehrt heifst die Abbildung, weil die abgebildeten Punkte F, A sich dem Ähnlichkeitspunkte gegenüber so verhalten, dafs der eine flieht, wenn der andere sich nähert. Auch C_1 ist ebenso wie C Ähnlichkeitspunkt. Es ist dann F_1 Abbildung von A und

$$C_1C \cdot C_1D = C_1F_1 \cdot C_1A = const.$$

Schneidet die abgebildete Gerade den Kreis, so erhalten wir genau denselben Satz. Dann fallen zweimal Punkt und Abbildung zusammen, und das konstante Rechteck wird ein Quadrat.

37.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise berührt und zwar den einen derselben in einem gegebenen Punkte.

Fig. 47.

Lösung. Es seien Kreise um A und B gegeben, ferner der Punkt C auf dem letzteren. Man ziehe in C an den Kreis um B eine Tangente, dann ist die Aufgabe in die vorhergehende verwandelt.

Zweite Lösung. Man bestimme den äufseren Ähnlichkeitspunkt F der beiden gegebenen Kreise und ziehe FC. Diese Linie schneide den Kreis um A in den Punkten E und D. Dann verhält sich infolge der Eigenschaft des Punktes F (vgl. Aufgabe 2 und 3)

$$FA : FB = AE : BC.$$

Nun ist Dreieck AED gleichschenklig, also FEA ein stumpfer Winkel, also $AE \parallel BC$. Denn wäre BC nicht parallel AE, so könnte man durch B eine Parallele zu AE ziehen, welche FL in einem solchen Punkte C' treffen müfste, dafs sich verhielte:

$$FA : FB = AE : BC',$$

also wäre $BC' = BC$ und der Winkel $BC'F$ ein stumpfer, was unmöglich ist. AD und BC treffen sich in G, dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises.

Beweis. In die Winkel bei E und D darf die gleiche Bezeichnung geschrieben werden, da sie Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind. Dieselbe Bezeichnung darf auch dem Winkel bei C erteilt werden, da $AE \parallel BC$. Jetzt lehrt der Satz von der Gleichheit der Scheitelwinkel, dafs $DG = GC$ ist.

Einschränkung. Man erhält zwei Auflösungen, da auch der innere Ähnlichkeitspunkt eine solche liefert. Als besonderer Fall ist derjenige zu behandeln, wo die beiden gegebenen Kreise gleich sind.

Weil die Dreiecke AEH und BCK gleichschenklig sind und in den Winkeln bei A und B übereinstimmen, so sind sie ähnlich. Es ist also $\sphericalangle JHE = MKC$. Nennen wir diesen Winkel β, so ist

$$JKC = 180^0 - \beta \text{ (Ergänzungswinkel)},$$
$$JDC = \beta \text{ (}HEDJ\text{ ist Kreisviereck)}.$$

Also ist $JDCK$ Kreisviereck. Ebenso ist auch $HELM$ Kreisviereck, also:

$$FJ \cdot FK = FD \cdot FC,$$
$$FH \cdot FM = FE \cdot FL.$$

Dies ist der zweite Satz von der umgekehrten Abbildung.

Dreht man den Strahl FL, bis er gemeinsame Tangente wird, so rücken die Punkte E, D einerseits und C, L anderseits zusammen, und man schliefst so, dafs ist

$$FJ \cdot FK = FD \cdot FC = FH \cdot FM = FE \cdot FL.$$

Übrigens läfst sich dies auch zeigen, indem man mit Hülfe der Centrale a und der beiden Kreisradien r und ϱ die vier Gröfsen FH, FJ, FK, FM ausdrückt.

In der Fig. 47 haben wir beide Abbildungen vereinigt. Der Kreis um B kann als ähnliche Abbildung des Kreises um A gelten. Dann entsprechen sich die Punkte H, K; J, M; E, C; D, L. In der umgekehrten Abbildung entsprechen sich H, M; J, K; E, L; D, C.

38.

Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Lösung. P sei der gegebene Punkt. (Fig. 46.) Man verbinde P mit dem Ähnlichkeitspunkte C und lege einen Kreis durch die Punkte C_1, D, P. Derselbe schneide CP im Punkte Q zum zweitenmal. Dann lege man durch P, Q einen Kreis, der die gegebene Gerade berührt, etwa in A. Er löst die Aufgabe.

Beweis. Man verbinde C mit A, dann schneidet diese Linie den gegebenen Kreis im Punkte F' und den gefundenen Kreis in F'' zum zweitenmal. Daher ist:

$CF' \cdot CA = CC_1 \cdot CD$ (erster Satz der umg. Abb.),
$CC_1 \cdot CD = CP \cdot CQ$ (Potenz am Kreise C_1, D, P),
$CP \cdot CQ = CF'' \cdot CA$ (Potenz am gefundenen Kreise).
Also $CF' = CF''$.

Hiermit ist gezeigt, dafs der gegebene und der gefundene Kreis auf der Geraden CA einen gemeinsamen Punkt F besitzen. Nun verdienen die Winkel bei A und C aber, weil $CD \parallel AH$, die gleiche Bezeichnung α; desgleichen die Winkel bei F als Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken, und nun folgt durch Umkehrung des Satzes über die Gleichheit der Scheitelwinkel, dafs BFH eine gerade Linie ist, also Berührung der Kreise stattfindet.

Einschränkung. Man erhält durch die Hülfsaufgabe (Kreis durch P, Q, welcher L berührt) die Entscheidung, dafs im allgemeinen zwei Auflösungen erhalten werden. Aber statt des Ähnlichkeitspunktes C hätte man auch den inneren C_1 nehmen können. Folglich sind im allgemeinen vier Lösungen möglich. Würde man die Aufgabe algebraisch angreifen, so könnte man zu einer Gleichung vierten Grades gelangen. Dieselbe würde aber nicht irreduktibel sein, sondern in zwei Gleichungen zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten zerfallen. Vgl. Aufgabe 36.

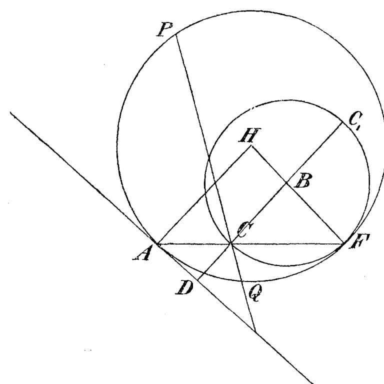


Fig. 48.

Nebenstehende Figur bringt den Fall des innern Ähnlichkeitspunktes zur Anschauung. Übrigens ist die Aufzählung aller Fälle, wenn auch nicht erforderlich, so doch eine nützliche Übung.

39.

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Man bestimme (Fig. 47) den äufseren Ähnlichkeitspunkt F der beiden gegebenen Kreise, verbinde F mit dem gegebenen Punkte P und lege durch die Punkte J, K und P einen Kreis, der FP in Q zum zweitenmal schneidet. Dann beschreibe man einen Kreis, der durch P, Q geht und den Kreis um A etwa in C berührt. Er löst die Aufgabe.

Beweis. Wir ziehen FC und zeigen: 1) FC begegnet dem Kreise um A und dem Kreise um G in demselben Punkte D. 2) ADG ist eine gerade Linie.

Ad 1). Möge FC den Kreis um G in D', den um A in D'', der umgekehrten Abbildung von C schneiden. Dann ist:

$FD'' \cdot FC = FJ \cdot FK$ (umg. Abb.),

$FJ \cdot FK = FP \cdot FQ$ (Potenz am Kreise $JKPQ$),

$FP \cdot FQ = FD' \cdot FC$ (Potenz am Kreise um G).

Also $FD' = FD''$.

Damit ist 1) bewiesen, D' und D'' fallen in D zusammen.

Ad 2). Es ist, wie in 37 gezeigt worden, $AE \parallel BC$. Daher folgt durch Winkelberechnung $\measuredangle ADE = GDC$, folglich ist ADG eine gerade Linie, und der Kreis um G berührt den Kreis um A.

Einschränkung. Man erhält nach obiger Vorschrift zwei Lösungen. Aber man kann auch vom inneren Ähnlichkeitspunkte ebensowohl ausgehen, wie dabei vom äufseren ausgegangen worden ist. So erhält man im ganzen vier Lösungen.

40.

Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt.

Lösung. Man stelle sich vor, die Aufgabe sei gelöst. Nun beschreibe man zu dem Lösungskreise einen konzentrischen, welcher durch den Mittelpunkt des einen der drei gegebenen Kreise geht. Dieser Kreis kann mit Hülfe der vorigen Aufgabe bestimmt werden. Man erhält acht Lösungen.

Zweite Lösung. Nach Gaufs, Ges. Werke, Bd. IV, S. 399.

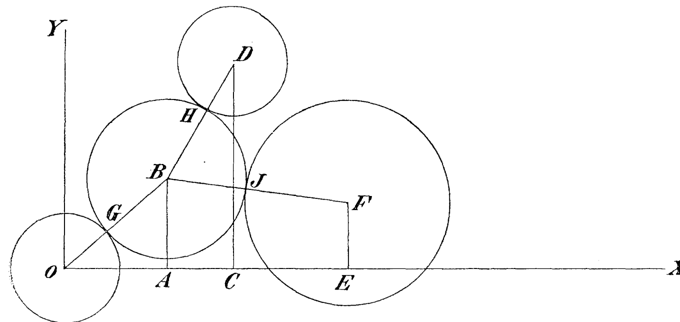


Fig. 49.

$$OC = c, \quad CD = d,$$
$$OE = a, \quad EF = b,$$

$$OA = x,\ AB = y,$$
$$OB = z,\ BD = z + n,$$
$$BF = z + m.$$

Der Pythagoreische Lehrsatz liefert:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (z + m)^2;$$
$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = (z + n)^2.$$

Setzt man nun

$$x = z \cos\varphi,\ y = z \sin\varphi,$$

so wird: $a^2 + b^2 - m^2 = 2z\,(a \cos\varphi + b \sin\varphi + m),$
$c^2 + d^2 - n^2 = 2z\,(c \cos\varphi + d \sin\varphi + n);$

also $$\frac{a^2 + b^2 - m^2}{a \cos\varphi + b \sin\varphi + m} = \frac{c^2 + d^2 - n^2}{c \cos\varphi + d \sin\varphi + n}.$$

Multipliziert man aus, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$A \cos\varphi + B \sin\varphi = C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man löst dieselbe am einfachsten durch Multiplikation mit einem Zahlfaktor λ. Denn sei

$$A\lambda = \sin\psi,\ B\lambda = \cos\psi,$$

so wird $$\sin(\varphi + \psi) = C\lambda$$

oder $$tg\,\psi = \frac{A}{B},\ \sin(\varphi + \psi) = \frac{C}{A} \cdot \sin\psi. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Angaben bestimmen ψ und φ, lösen also (1).

Man kann auch durch Quadrieren finden

$$\sin^2\varphi - \frac{2BC}{A^2 + B^2} \sin\varphi = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2}.$$

Ist $\sin\varphi$ gefunden, so liefert (1) eindeutig den zugehörigen $\cos\varphi$. Daher kann über die genaue Bestimmung von φ kein Zweifel bleiben.

Dritte Lösung. Nach Petersen, Methoden und Theorien.

Nimmt man einen festen Punkt O als Ähnlichkeitspunkt, so kann man zu jedem Punkte A die ähnliche Abbildung A' finden. Man verbinde OA mit A und mache $OA' = m \cdot OA$. Dabei kann natürlich m eine ganze oder gebrochene oder irrationale Zahl sein. Ist m negativ, so trage man OA' von O aus in entgegengesetzter Richtung ab wie OA. Liegen die Punkte $A, B, C, \ldots$ auf einer Geraden, so liegen die Punkte $A', B', C', \ldots$ ebenfalls auf einer Geraden und zwar auf einer solchen, welche der

ersteren parallel ist. Sind zwei sich schneidende Gerade ähnlich abgebildet, so entspricht der Schnittpunkt der ursprünglichen Geraden dem Schnittpunkte der Abbildungen; der letztere ist die ähnliche Abbildung des erstern. Aus dem Gesagten geht hervor, daſs die Verbindungslinie zweier Punkte A und A', von denen A' das ähnliche Abbild von A ist, immer durch den Ähnlichkeitspunkt O geht. Liegen die Punkte A, B, C, . . . auf einem Kreise, so liegen die Punkte A', B', C', . . . ebenfalls auf einem Kreise. Ist m eine positive Zahl, so liegen die beiden Kreise so, daſs O ihr äuſserer Ähnlichkeitspunkt ist; ist m eine negative Zahl, so ist O innerer Ähnlichkeitspunkt. Schneiden sich zwei Gerade, Kreise, so schneiden sich die Bilder in ähnlichen Punkten. Ist eine Strecke in gleiche Teile geteilt, so teilen die Bilder der Teilpunkte das Bild der Strecke in dieselbe Anzahl gleicher Teile. Ist eine Gerade Tangente eines Kreises, so berührt das Bild der Geraden auch das Bild des Kreises. Ein interessanter Fall ähnlicher Abbildung wird durch die nebenstehende Figur dargestellt. Es handelt sich um ein negatives $m = \frac{r}{\varrho}$, wenn r der Radius des Bildes, ϱ der des ursprünglichen Kreises ist. Man findet an der Figur unsere sämtlichen Ausführungen dargestellt.

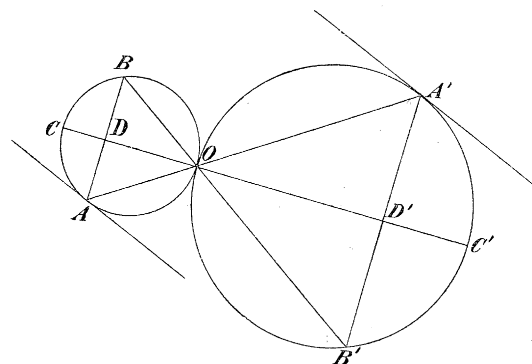


Fig. 50.

Hülfssatz. Berührt ein Kreis zwei Kreise, und verbindet man die Berührungspunkte mit den Berührungspunkten einer gleichartig berührenden gemeinsamen Tangente der zwei Kreise, so treffen sich diese Verbindungslinien auf dem berührenden Kreise und der Treffpunkt gehört der Chordale der beiden berührten Kreise an.

In den Winkel bei D (Fig. 51) schreiben wir α, so folgt die Richtigkeit der übrigen Bezeichnungen α aus Sätzen über Scheitelwinkel und Basiswinkel. Also ist $CH \parallel AD$, oder FD trifft die Peripherie des berührenden Kreises in einem solchen Punkte, daſs der

zugehörende Radius CH auf der gemeinsamen Tangente senkrecht ist. Gleiches gilt für GE. Folglich

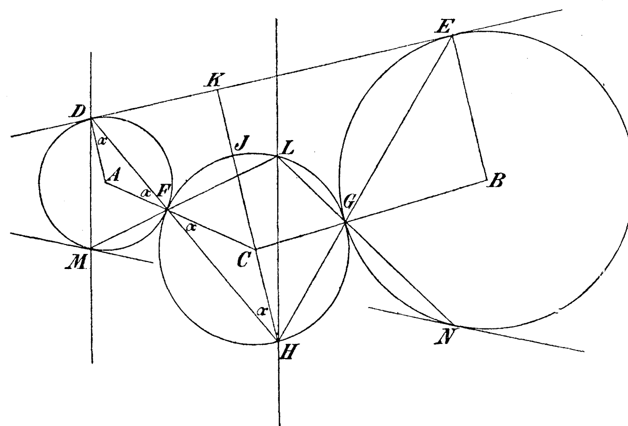


Fig. 51.

trifft GE denselben Punkt H. Nun ist nach dem ersten Satze von der umgekehrten Abbildung in Bezug auf den Kreis HFJ:

$$HJ \cdot HK = HF \cdot HD,$$
$$HJ \cdot HK = HG \cdot HE.$$

Also: $$HF \cdot HD = HG \cdot HE.$$

Folglich ist H ein Punkt der Chordale. Ebenso treffen MF und NG sich auf dem berührenden Kreise und auf der Chordale der ursprünglichen Kreise in L. HL ist die Chordale der Kreise um A und B. HL ist Abbildung der Berührungssehne DM, wenn der Kreis C als ähnliches Abbild des Kreises A gilt. Hiernach ergiebt sich jetzt folgende einfache Lösung:

Gegeben seien die Kreise A, B, B_1. Man bestimme die Berührungssehne DM und die Chordale HL der beiden Kreise A und B. Hierauf bestimme man ebenso D_1M_1 und H_1L_1 für die Kreise A und B_1. HL ist Abbildung von DM, H_1L_1 von D_1M_1, wenn man den Kreis A in den berührenden Kreis ähnlich abbildet. Folglich trifft die Verbindungslinie des Schnittpunktes von DM und D_1M_1 mit dem Schnittpunkte von HL und H_1L_1 den Kreis um A in demjenigen Punkte, in welchem er von dem gesuchten Kreise berührt wird, im Punkte F.

41.

Die Malfattische Aufgabe. (Malfatti † 1807, Lösung nach Schellbach, Crelles Journal, Bd. 45, S. 91, und Mathematische Aufgaben, S. 100.)

Wenn zwei Kreise einander und eine Gerade berühren, so sei $BE = r$, $AD = \varrho$, also $BC = r - \varrho$, $AB = r + \varrho$. Es wird also

$$\sqrt{(r+\varrho)^2 - (r-\varrho)^2} = AC = DE = 2\sqrt{r\varrho}.$$

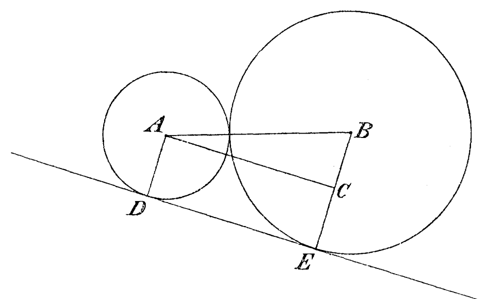


Fig. 52.

Diese Bemerkung schicken wir voraus. Die Malfattische Aufgabe verlangt: In ein gegebenes Dreieck drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt. Wir setzen (Fig. 53)

$$AF = x,\ BE = y,\ CD = z.$$

Dann ist der Radius des Kreises um G gleich $z\,tg\frac{\gamma}{2}$, der Radius des Kreises um H ist $y\,tg\frac{\beta}{2}$, daher

$$ED^2 = 4\,zy \cdot tg\frac{\gamma}{2}\,tg\frac{\beta}{2} \text{ (Aufgabe 21)},$$

$$ED^2 = 4\frac{\varrho^2}{(\sigma - b)(\sigma - c)}zy = 4\frac{\sigma - a}{\sigma}zy.$$

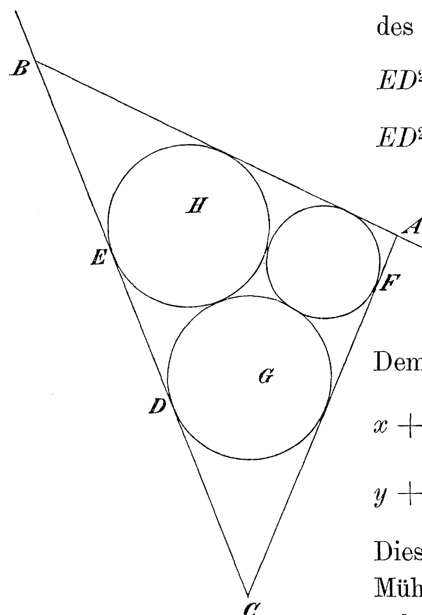


Fig. 53.

Folglich erhalten wir als erste Gleichung:

$$z + y + 2\sqrt{\frac{\sigma - a}{\sigma}}\sqrt{zy} = a. \quad (1)$$

Dementsprechend folgen zwei andere:

$$\left.\begin{aligned} x + z + 2\sqrt{\frac{\sigma - b}{\sigma}}\sqrt{xz} &= b,\\ y + x + 2\sqrt{\frac{\sigma - c}{\sigma}}\sqrt{yx} &= c. \end{aligned}\right\}(2)$$

Diesen Gleichungen können wir ohne Mühe die Form des Cosinussatzes geben.

Wir setzen: $\sigma x = \xi^2,\ \sigma y = \eta^2,\ \sigma z = \zeta^2;$

$$\frac{a}{\sigma} = \sin^2 \lambda,\ \frac{b}{\sigma} = \sin^2 \mu,\ \frac{c}{\sigma} = \sin^2 \nu.$$

Dann werden unsere Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cdot \cos\nu = \sigma^2 \sin^2\nu, \\ \eta^2 + \zeta^2 + 2\eta\zeta \cdot \cos\lambda = \sigma^2 \sin^2\lambda, \\ \zeta^2 + \xi^2 + 2\zeta\xi \cdot \cos\mu = \sigma^2 \sin^2\mu. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Den geometrischen Sinn dieser Gleichungen werden wir später noch einmal näher betrachten. Jetzt setzen wir:

$$\xi = \sigma \sin\varphi,\ \eta = \sigma \sin\psi,\ \zeta = \sigma \sin\vartheta,$$

dann wird aus der ersten Gleichung (3)

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi = 1 - \cos^2\nu - 2 \sin\varphi \sin\psi \cos\nu;$$

folglich: $(1 - \sin^2\varphi)(1 - \sin^2\psi) = (\cos\nu + \sin\varphi \sin\varphi)^2,$

$$\cos\varphi \cos\psi = \cos\nu + \sin\varphi \sin\psi;$$

also mit Hülfe des Additionstheorems des Cosinus:

$$\nu = \varphi + \psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ebenso erhält man $\lambda = \psi + \vartheta,$

$$\mu = \varphi + \vartheta.$$

Die sonstigen Werte, welche den Gleichungen (3) genügen, haben für die eingeschriebenen Kreise keinen Sinn. Es ist also endlich:

$$\varphi = \frac{-\lambda + \mu + \nu}{2},$$

$$\psi = \frac{\lambda - \mu + \nu}{2},$$

$$\vartheta = \frac{\lambda + \mu - \nu}{2};$$

$$\frac{a}{\sigma} = \sin^2\lambda,\ \frac{b}{\sigma} = \sin^2\mu,\ \frac{c}{\sigma} = \sin^2\nu;\ 2\sigma = a + b + c;$$

$$x = \sigma \sin^2\varphi,\ y = \sigma \sin^2\psi,\ z = \sigma \sin^2\vartheta.$$

Vgl. zur tieferen Ergründung dieser Lösung Gudermann, Modularfunktionen, Crelles Journal, Bd. 18, § 1 u. 2.

42.

Ein Dreieck zu zeichnen aus b, c, m_α. (Zwei Seiten und der zur dritten gehörende Winkelhalbierer.)

Lösung. Man bestimme (Fig. 54) eine Strecke x durch die Verhältnisgleichung:

$$b : (b + c) = m_\alpha : x,$$

zeichne das Dreieck ADB aus den Seiten $AB = AD = c$, $DB = x$, verlängere DA über A hinaus, bis $AC = b$ wird, und ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Man ziehe $AE \parallel DB$. Dann findet man durch Winkelberechnung $\measuredangle\ CAE = CDB$; $EAB = ABD$; $ABD = ADB$.

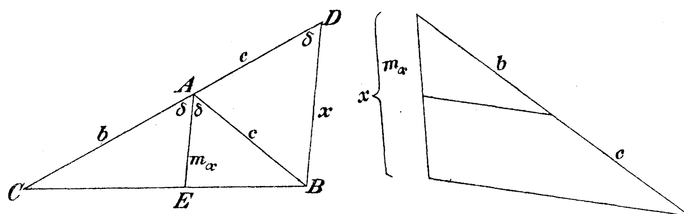


Fig. 54.

Daher kommt allen eine gemeinsame Bezeichnung δ zu. Folglich ist AE Winkelhalbierer.

Es ist aber $\qquad CA : CD = AE : BD$

oder $\qquad b : (b + c) = AE : x.$

In der Nebenfigur ist $b : (b + c) = m_\alpha : x.$

Folglich ist $\qquad AE = m_\alpha.$

Einschränkung. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn $x > 2c$

oder $$m_\alpha > \frac{2bc}{b+c} \quad \dots \dots \quad (1)$$

Zweite Lösung. Man kann x mit Hülfe des Cosinussatzes aus dem Dreiecke DCB bestimmen. Man findet

$$x^2 = (b + c)^2 + a^2 - 2a(b + c) \cos\gamma,$$

und indem man $\cos\gamma$ durch die Seiten ausdrückt,

$$x^2 b = c(b^2 + 2bc + c^2 - a^2).$$

Folglich mit Hülfe der obigen Verhältnisgleichung

$$x^2 b^2 = m_\alpha^2 (b + c)^2 = bc(b + c + a)(b + c - a). \quad (2)$$

Hieraus folgt für a der Wert aus der Gleichung

$$a^2 = (b + c)^2 \left(1 - \frac{m_\alpha^2}{bc}\right) \quad \dots \dots \quad (3)$$

Um die Strecke a zu zeichnen, verwandeln wir das Rechteck bc in ein Quadrat, $bc = \varepsilon^2$; dann zeichnen wir $\varepsilon^2 - m_\alpha^2 = \eta^2$ und endlich a aus $\qquad a : (b + c) = \eta : \varepsilon.$

Gleichung (3) verlangt, dafs $m_\alpha^2 < bc$ sei; allein diese Bedingung ist nicht völlig ausreichend. Ist sie erfüllt, so haben wir zwar reelle a, b, c, aber noch kein reelles Dreieck. Dies ist erst der Fall, wenn auch noch $a > b - c$,

also $\qquad a^2 > (b + c)^2 - 4bc,$

also nach (3)

$$(b + c)^2 - \frac{m_\alpha^2}{bc}(b + c)^2 > (b + c)^2 - 4\,bc$$

oder

$$m_\alpha < \frac{2\,bc}{b + c}$$

übereinstimmend mit (1). Es mufs m_α also immer kleiner sein als das sogenannte harmonische Mittel der Seiten. Dasselbe ist kleiner als das geometrische Mittel $\sqrt{bc}$, denn

$$\frac{2\,bc}{b + c} = \sqrt{bc} \cdot \frac{2\sqrt{bc}}{b + c} < \sqrt{bc}.$$

Das geometrische Mittel ist endlich kleiner als das arithmetische Mittel. Für die Zahlen 4, 9 sind die drei Mittel:

$$mh = \frac{72}{13} = 5{,}5\;.\,.,\; mg = 6,\; ma = \frac{4 + 9}{2} = 6{,}5.$$

43.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, α, m_α.

Vorbereitung. Man kann über a als Sehne einen Bogen beschreiben, der den Winkel α fafst. Dann geht der Winkelhalbierer durch den Pfeilpunkt des entgegengesetzten Kreisbogens. Zugleich kann man diesen Punkt als Ähnlichkeitspunkt einer umgekehrten Abbildung ansehen.

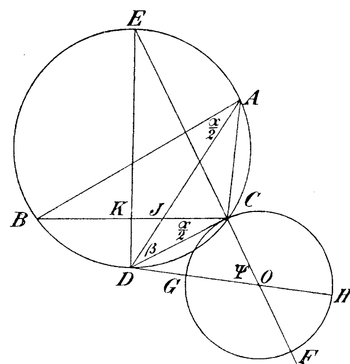


Fig. 55.

Lösung**. Man beschreibe über $BC = a$ einen des Winkels α fähigen Kreisbogen und ziehe den zu BC senkrechten Durchmesser ED, so ist BC umgekehrte Abbildung des Kreises mit dem Ähnlichkeitspunkt D. Man verlängere EC, beschreibe über $CF = m_\alpha$ als Durchmesser einen Kreis und verbinde D mit dem Mittelpunkte O. Mit dem aufserhalb liegenden Stücke DG beschreibe man um D einen Kreis, der BC in J trifft, und ziehe DJ. Diese Linie trifft den über BC stehenden Kreisbogen im verlangten Punkte A.

* Vom Verfasser.

Beweis. DA halbiert den Winkel BAC, weil $BD = DC$ ist. Weil $DC \perp EC$, so ist DC Tangente des Kreises um O, also $DC^2 = DG \cdot DH$. Durch den ersten Satz von der umgekehrten Abbildung erhalten wir $DC^2 = DJ \cdot DA = DK \cdot DE$,

mithin $DG \cdot DH = DJ \cdot DA$,

also, weil $DG = DJ$, auch $DH = DA$,

daher $AJ = GH = m_\alpha$.

Einschränkung. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn $DG < DK$. Im Grenzfalle wird $DG = DK$, also $GH = KE$ oder $a = 2m \cot\frac{\alpha}{2}$ aus dem Dreieck EKC. Die hieraus zu entnehmende Bedingung der Möglichkeit $a \gtreqless 2m \cot\frac{\alpha}{2}$ wird durch trigonometrische Rechnung bestätigt.

Die trigonometrische Lösung ist folgende. Es ist $\measuredangle EDA = 90^0 - \frac{\alpha}{2} - \beta$, daher $\measuredangle EDA = \frac{\gamma - \beta}{2}$. Sei $\measuredangle DOC = \psi$; es ist $\measuredangle BCD = \frac{\alpha}{2}$, also $DC = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $CO = \frac{m_\alpha}{2}$, folglich $\cot\psi = \frac{m_\alpha}{a}\cos\frac{\alpha}{2}$. Nun erhält man für das Dreieck DCH, da $\measuredangle DCH = 90^0 + \frac{\psi}{2}$, $\measuredangle CHD = \frac{\psi}{2}$, nach dem Sinussatze $DC \cdot \sin\left(90^0 + \frac{\psi}{2}\right) = DH \cdot \sin\frac{\psi}{2}$. Folglich, weil $AD = DH$ ist,

$\frac{DA}{DC} = \cot\frac{\psi}{2}$; ferner aus Dreieck DCE:

$\frac{DC}{DE} = \sin\frac{\alpha}{2}$. Nun ist aus Dreieck DAE und durch Multiplikation der vorigen Gleichungen

$$\frac{DA}{DE} = \cos\frac{\gamma - \beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\psi}{2}.$$

Man hat also die trigonometrische Lösung unserer Aufgabe: Es sei gesetzt $\cot\psi = \frac{m_\alpha}{a}\cos\frac{\alpha}{2}$,

so folgt $$\cos\frac{\gamma - \beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\psi}{2}.$$

44.

Ein Dreieck zu zeichnen aus $b + c = s$, a, h_α.

Diese Aufgabe wird am besten nach der Methode bearbeitet, welche von Petersen Drehung genannt ist. Man drehe das Dreieck so um den Punkt A herum, dafs AB in die Richtung von CA

(über A hinaus) gelangt, also $CD = s$ wird. Die Höhe AE gelangt in die Lage AF. Es ist $\sphericalangle EAF = 180^0 - \alpha$, weil eine Drehung um $180^0 - \alpha$ vorgenommen worden ist. DF trifft nun BC in einem Punkte G, so dafs $\sphericalangle DGB = \alpha$ ist, da die Figur $AFGE$ ein Kreisviereck ist. Die Dreiecke GFA und GEA sind deckend, also $\sphericalangle AGE = AGF = \frac{\alpha}{2}$ und AG herstellbar. Vom Dreiecke DGC kennen wir also die Grundlinie $DC = s$, den Winkel an der Spitze $DGC = \alpha$ und den zugehörigen Winkelhalbierer AG. Übrigens ist Dreieck $DGC \sim BAC$, also die trigonometrische Lösung der vorigen Aufgabe

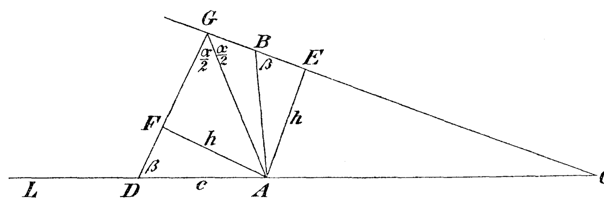


Fig. 56.

auch hier anwendbar. Es ist $GA = \frac{h_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ für m_α einzusetzen. Dann wird:

$$\cot\psi = \frac{h_a}{s}\cot\frac{\alpha}{2};\ \cos\frac{\gamma-\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\psi}{2}.$$

Es ist $\sphericalangle DAG = 90^0 - \beta + 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 90^0 + \frac{\gamma-\beta}{2}$. Also ist die von G aus auf DC gefällte Senkrechte gleich $GA \cdot \cos\frac{\gamma-\beta}{2} = h_a \,.\, \cot\frac{\psi}{2}$. Da nun $DGC \sim BAC$, so ist

$$s : a = h_a \cdot \cot\frac{\psi}{2} : h_a,$$

$$a = \frac{s}{\cot\frac{\psi}{2}}.$$

Nennt man den äufsern Winkelhalbierer m'_α, so kann man den letzten drei Aufgaben folgende an die Seite stellen:

Ein Dreieck zu zeichnen aus b, c, m'_α; aus a, α, m'_α; aus $b - c = d,\ h_a,\ m'_\alpha$.

Man kann die Aufgabe 43 durch folgende allgemeinere ersetzen: Gegeben ein Winkel α und zwischen den Schenkeln desselben ein Punkt; man soll durch den Punkt eine Gerade so ziehen, dafs das von den Schenkeln abgeschnittene Stück eine vorgeschriebene Gröfse a hat. Allein diese Aufgabe ist mit Zirkel und Lineal nicht lösbar. Sie ist identisch mit der Aufgabe, die Schnittpunkte der Konchoide mit einer Geraden zu suchen.

45.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Punkte B, C ($BC = a$), $b + c = s$ und ein Punkt des äufsern Winkelhalbierers gegeben sind.

Lösung. Um den einen Endpunkt B der Strecke BC beschreibe man mit s als Radius einen Kreis, ebenso mit PC um den gegebenen Punkt P. Den Schnittpunkt D der beiden Kreise verbinde man mit C und ziehe $PE \perp DC$. PE trifft DB im Punkte A, und ABC löst die Aufgabe.

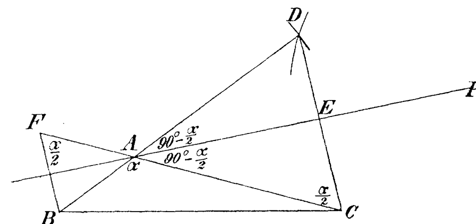


Fig. 57.

Beweis. Dreieck $DEA \cong CEA$; folglich ist $AC = AD$, $AC + AB = s$; endlich halbiert PA den Aufsenwinkel des Dreiecks BAC.

Einschränkung. Zunächst enthält unsere Zeichnung eine gewisse Willkür. Wir hätten auch um C mit s und um P mit PB Kreise beschreiben können, da B und C völlig gleich berechtigte Punkte sind. Allein wir würden alsdann zu demselben Punkte A gelangt sein. Macht man $AF = AB$, so ist Dreieck $PAF \cong PAB$, also $PF = PB$ und $FC = s$. Da nun $BF \parallel CD$ ist, so ist $PA \perp BF$ und trifft FC genau in demselben Punkte A, den die obige Konstruktion ergab.

Im übrigen erhält man im allgemeinen zwei Lösungen, und zwar sind dieselben immer vorhanden, wenn

$$PB + PC > s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denn es ist $PB - PC < a < s$. Ist also die Bedingung (1) erfüllt, so kann man immer das Dreieck PBD zeichnen, weil wegen $PD = PC$ sowohl $PB + PD > s$ als auch $PB - PD < s$ ist. Unsere Untersuchung hat uns jetzt mit Notwendigkeit zu Dingen geführt, welche schon in Aufgabe 13 besprochen wurden, aber erst jetzt in ihr volles Licht treten. Greifen wir auf PE irgend einen Punkt heraus, so ist die Summe seiner Abstände von B und C immer gröfser als $AB + AC = s$. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten unveränderlich ist, ist eine Ellipse. Die beiden festen Punkte B, C sind ihre Brennpunkte, die unveränderliche Summe $AB + AC$ ist ihre grofse Axe. Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve; sie hat einen

Mittelpunkt, und für einen Punkt P innerhalb der Ellipse ist $PB + PC < s$, für einen Punkt aufserhalb ist $PB + PC > s$. Die gerade Linie PA hat mit der Ellipse nur einen Punkt, den Punkt A gemeinsam. Alle übrigen Punkte von PA liegen aufserhalb der Ellipse. Folglich ist PA Tangente der Kurve. Wir können jetzt folgende Aufgaben lösen:

Gegeben eine Ellipse durch ihre Brennpunkte und ihre grofse Axe; man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden mit der Ellipse. Diese Aufgabe ist mit der Voraufgabe zu 13 gelöst.

Gegeben eine Ellipse und ein Punkt P derselben; man ziehe im Punkte P eine Tangente an die Ellipse. — Wir ziehen in P den äufseren Winkelhalbierer des Dreiecks PBC.

Gegeben eine Ellipse und ein Punkt aufserhalb derselben; man ziehe von dem Punkte aus an die Ellipse eine Tangente. — Diese Aufgabe ist mit 45 identisch. Man erhält stets zwei Tangenten als Lösung.

Die Brennpunkte der Ellipse haben auch physikalische Bedeutung in ihrer Beziehung zur Tangente.

46.

Die Endpunkte einer Schnur sind in B und C an einer senkrechten Wand befestigt. Auf der Schnur ist ein schwerer Körper (ein Schlüssel) ohne Reibung verschiebbar. Man bestimme die Ruhelage.

Vorbereitung. Wären die Punkte B und C in gleicher Höhe vom Fufsboden befindlich, so würde der Faden zu halbieren sein. Im tiefsten Punkte A würde der Körper zur Ruhe kommen, weil die Schwerkraft den Winkel BAC alsdann halbiert. Ist B höher als C, so wird das Gleichgewicht nicht gestört, wenn wir auf dem Faden in gleicher Höhe mit C, im Punkte D eine neue Befestigung anbringen. Also ist klar, dafs die Schwerkraft den Winkel BAC halbieren mufs. Hiernach können wir die Aufgabe geometrisch folgendermafsen aussprechen:

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist a, $b + c = s$ und die Richtung des Winkelhalbierers.

Führt man den gleitenden Punkt auf der gespannten Schnur herum, so beschreibt er eine Ellipse. Die Tangente dieser Ellipse soll nun senkrecht zur Richtung der Schwerkraft, also wagerecht liegen. Daher können wir der Aufgabe auch die Form geben:

An eine durch ihre Brennpunkte und ihre grofse Axe gegebene Ellipse soll in vorgeschriebener Richtung eine Tangente gelegt werden.

Lösung. Man beschreibe um B (Fig. 57) mit der Fadenlänge (der grofsen Axe) einen Kreis, ziehe durch C eine Parallele zur vorgeschriebenen Richtung des Winkelhalbierers (eine Senkrechte zur vorgeschriebenen Richtung der Tangente), welche den Kreis im Punkte D treffen möge, mache $CE = ED$; $AE \perp DC$ löst die Aufgabe.

Beweis. $AC = AD$, also $AC + BC = s$. Halbiert man $\measuredangle BAC$, so wird die Halbierungslinie parallel DC aus Gleichheit der Wechselwinkel. — AE ist Tangente der Ellipse und senkrecht DC, also parallel der ihr vorgeschriebenen Richtung.

Einschränkung. Wir erhalten immer zwei Lösungen. Also hat die Ellipse in jeder vorgeschriebenen Richtung zwei parallele Tangenten. Für die physikalische Aufgabe hat nur die eine Lösung Sinn.

47.

Ein Dreieck zu zeichnen aus den gegebenen Punkten B, C ($BC = a$), $b - c = d$ und einem Punkte des Winkelhalbierers.

Lösung. Man beschreibe (Fig. 58) um den gegebenen Punkt B mit der gegebenen Differenz d einen Kreis, ebenso um P mit PC. Den Schnittpunkt D der beiden Kreise verbinde man mit C, mache $DE = EC$; PE trifft BD im gesuchten Punkte A.

Beweis. Dreieck $ADE \cong ACE$, also ist PA Winkelhalbierer. Da $AC = AD$, so ist $AB - AC = d$.

Einschränkung. In der Zeichnung ist eine gewisse Willkür vorhanden. Man hätte um C mit d und um P mit PB einen Kreis beschreiben können. Macht man aber $AF = AB$, so wird $PF = PB$. Also würde man durch diese Konstruktion BF statt DC, aber denselben Punkt A erhalten haben. Übrigens ist

$$PB - PC < d \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die notwendige Bedingung der Lösbarkeit. Ist sie erfüllt, so erhalten wir zwei Lösungen. Denn $PB + PC > a$ ist durch das Dreieck PBC immer gesichert, und da $a > d$, so ist sicher $PB + PC > d$. Folglich ist, wenn (1) erfüllt ist, das Dreieck BPD immer vorhanden. Unsere Figur bringt den Fall zur Anschauung, wo $BP > CP$ ist. Für $CP \geqq BP$ gilt genau dasselbe. Jetzt

zerfallen die Punkte der Ebene in Bezug auf unsere Figur in drei Klassen. Die erste Klasse enthält solche Punkte, für welche $PB - PC < d$ ($PC - PB < d$, wenn $PC > PB$). Für die zweite Klasse ist $PB - PC = d$ (oder $PC - PB = d$, wenn $PC > PB$); für die dritte Klasse ist $PB - PC > d$ (oder $PC - PB > d$).

Fig. 58.

Man könnte auch folgende sieben Klassen unterscheiden: 1) $PB - PC > d$; die Aufgabe ist nicht lösbar. 2) $PB - PC = d$; Grenzfall, es ist nur eine Auflösung vorhanden durch Halbierung des Winkels CPB. 3) $PB - PC < d$. 4) $PB = PC$. 5) $PC - PB < d$; die Aufgabe bietet in diesen Fällen zwei Auflösungen dar. 6) $PC - PB = d$; Grenzfall, es ist nur eine Auflösung vorhanden. 7) $PC - PB > d$; die Aufgabe ist nicht lösbar.

Wir werden also durch unsere Aufgabe gezwungen, die beiden Fälle näher ins Auge zu fassen, welche unter 2) und 6) aufgeführt sind. Der geometrische Ort dieser Punkte ist eine Kurve. Jeder ihrer Punkte ist Mittelpunkt eines Kreises, der den um B mit d beschriebenen Kreis berührt und durch den Punkt C geht. Sie ist nicht geschlossen, sondern verläuft ins Unendliche. Sie besteht aus zwei Zweigen. Die gerade Linie PA hat mit der Kurve nur den Punkt A gemeinsam. Für alle übrigen Punkte der Geraden ist $PB - PC < d$. Verschiebt man P auf einer Parallelen zu BC, so nimmt bei dieser Bewegung, wenn sie nach C hin gerichtet ist, PB zu, PC ab; also wird bald ein Punkt Q angetroffen werden, für den $QB - QC = d$ ist. Also liegt die Kurve, welche der Geraden PA in A begegnet, in der Nähe von A nach der dem Punkte C zugewandten Seite. Also ist PA Tangente der Kurve.

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, unveränderlich ist, heifst Hyperbel. Sie wird von jeder Geraden im allgemeinen in zwei Punkten geschnitten. (Vgl. Aufgabe 18.) Halbiert man den Winkel der Brennstrahlen eines Punktes, so hat man die Tangente der Hyperbel in diesem Punkte. Die Hyperbel hat einen Mittelpunkt. Unsere Aufgabe 47 ist identisch mit der folgenden:

An eine durch ihre Brennpunkte und ihre grofse Axe d gegebene Hyperbel eine Tangente von einem gegebenen Punkte P aus zu ziehen.

48.

Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Punkte B, C, die Differenz $b - c = d$ und die Richtung des Winkelhalbierers bekannt sind.

Lösung. Man beschreibe um den gegebenen Punkt B mit der gegebenen Strecke d einen Kreis, der den Punkt C ausschliefsen mufs, wenn eine eigentliche Lösung erwartet wird. Alsdann ziehe man durch C eine Senkrechte zur gegebenen Richtung ML. Diese Senkrechte möge den Kreis im Punkte D treffen. Man mache $CE = ED$, ziehe BD, und die Senkrechte zu CD in E bestimmt auf BD den Punkt A.

Fig. 59.

Beweis. Dreieck $AEC \cong AED$, also ist AE Winkelhalbierer. Es ist $AE \perp CD$; $CD \perp ML$, also $AE \parallel ML$. Endlich ist $AB - AC = AB - AD = DB = d$.

Einschränkung. Man erhält im allgemeinen zwei Auflösungen. Dieselben fallen zusammen, wenn CD Tangente des Kreises wird. Alsdann liegt der Punkt A unendlich fern, weil $DB \parallel AE$ wird. Trifft die zu ML gezogene Senkrechte den Kreis nicht, so ist die Aufgabe unlösbar.

Vorstehende Aufgabe kann folgendermafsen ausgesprochen werden:

An eine durch ihre Brennpunkte und ihre grofse Axe gegebene Hyperbel eine Tangente von vorgeschriebener Richtung zu ziehen.

Wir haben folgendes Ergebnis: Zieht man (Fig. 60) von C aus an den um B mit d beschriebenen Kreis das Tangentenpaar CD und CG, halbiert die Tangenten in E und F und zieht die Senkrechten OE, OF, so berühren diese Senkrechten die Kurve in unendlich fernen Punkten. Sie sind Asymptoten der Hyperbel. Dreht man OE, bis es in die Richtung OH gelangt, so erhält

man für jede zwischenliegende Richtung zwei parallele Tangenten der Hyperbel. Setzt man die Drehung weiter fort, so ist es unmöglich, zu einer solchen Richtung eine parallele Tangente zu ziehen. Fällt man aber von C auf eine solche Richtung eine Senkrechte, so liegt der Gegenpunkt bezüglich dieser Senkrechten von C immer aufserhalb des Kreises. Also sind immer auf der Richtung zwei Punkte als Mittelpunkte von Kreisen angebbar, welche durch den Punkt C gehen und den Kreis um B berühren. Jede solche durch O gehende Gerade schneidet also die Hyperbel in zwei Punkten. Da $OE \parallel BD$ und $CE = ED$, so ist auch $OC = OB$. — Dieser Punkt O ist Mittelpunkt der Hyperbel, wie die folgende Figur zu erkennen giebt. $OB = OC$, GO die beliebige Gerade, $CJ = JF$, E der Mittelpunkt eines Kreises, der durch C, F geht und den Kreis um B in D berührt. Machen wir nun $OE = OG$, so ist $GB \# CE$, $GH = GB + BH = CE + DB = EB = CG$. Also berührt ein um G mit GC beschriebener Kreis auch den Kreis um B und geht durch die Punkte C, F. G und E sind also

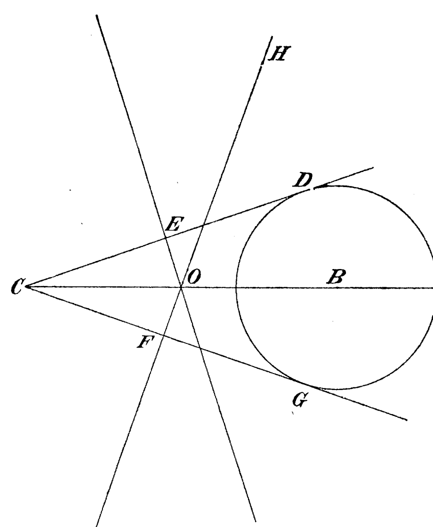


Fig. 60.

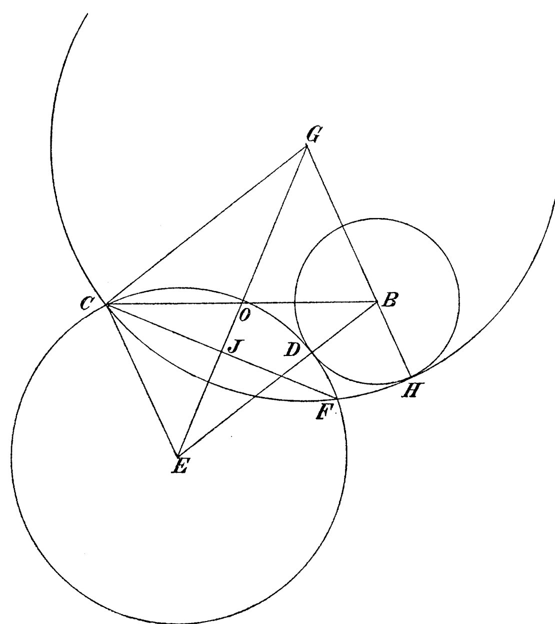


Fig. 61.

zwei Punkte der Hyperbel und haben von O gleichen Abstand. O ist folglich Mittelpunkt der Hyperbel.

Man kann auch folgenden sehr einfachen Beweis führen. Sei E ein Punkt der Hyperbel, also $EB - EC = d$. Wir verbinden E mit O, dem Mittelpunkte von BC, und machen $OE = OG$. Alsdann ist auch G ein Punkt der Hyperbel. Denn $CEBG$ ist ein Parallelogramm, also $CE = GB$, $BE = CG$. Folglich $GC - GB = d$.

G und E gehören verschiedenen Zweigen der Hyperbel an. Man sieht, daſs die zu Aufgabe 18 gemachte Bemerkung zutreffend war.

49.

Man löse durch Rechnung die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b + c = s$, h_a.

Lösung. O sei der Mittelpunkt von BC; der Fuſspunkt der Höhe h_a sei D. Wir setzen $OD = x$, $AD = y$, dann ist

$$c^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2; \quad b^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + y^2. \quad . \quad (1)$$

Andrerseits ist

$$b + c = s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wir suchen diese Gleichung in eine andere umzuformen, welche nur die Quadrate von b und c enthält. Zu diesem Zwecke quadrieren wir zweimal die Gleichung $b = s - c$, dann ergiebt sich:

$$(b^2 - c^2 - s^2)^2 = 4c^2s^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

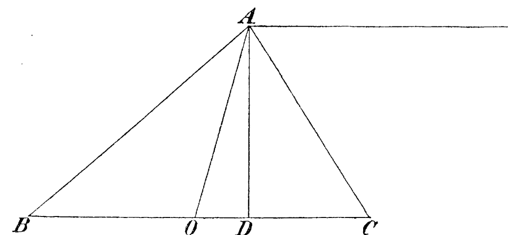


Fig. 62.

Diese Gleichung hat die gesuchte Eigenschaft. Durch Ausführung der Rechnung findet man die in Aufgabe 21 erhaltene Formel, welche hier aussagt, daſs der Inhalt des aus den Seiten b, c, s gebildeten Dreiecks verschwindet. Es wäre für unseren Zweck nicht vorteilhaft, diese Rechnung auszuführen. Aus (3) wird, wenn man $b^2 - c^2$ und c^2 aus (1) bestimmt und in (3) einsetzt:

$$(s^2 + 2ax)^2 = 4s^2\left(\frac{a^2}{4} + ax + x^2 + y^2\right),$$

$$4(s^2 - a^2)x^2 + 4s^2y^2 = s^2(s^2 - a^2) \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs $AB + AC = s$, $BC = a$ ist. Sie sagt also, dafs A sich auf einer Ellipse befindet, deren Brennpunkte B, C den Abstand a haben und deren grofse Axe den Wert s hat. Diese Gleichung zweiten Grades ist also die Gleichung der Ellipse.

Nun soll die Höhe des Dreiecks die Gröfse h_a haben, oder es soll sein

$$y = h_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs A sich auf einer Geraden befindet, welche BC im Abstande h_a parallel läuft. Denn, zeichnet man irgend einen Punkt, dessen x beliebig, dessen $y = h_a$ ist, so trifft man immer auf einen Punkt dieser Parallelen. Diese Gleichung ersten Grades (5) ist also die Gleichung der Parallelen. Die Auflösung ergiebt:

$$x^2 + \frac{s^2 h_a^2}{s^2 - a^2} = \frac{s^2}{4}.$$

Die Zeichnung bestimmt der Reihe nach:

1) die Strecke α aus $s^2 - a^2 = \alpha^2$;
2) „ „ β „ $\beta : s = h_a : \alpha$;
3) „ „ x „ $x^2 + \beta^2 = \frac{s^2}{4}$.

Die Gleichung der Ellipse bringt man gewöhnlich auf eine andere Form. Man setzt $\frac{s}{2} = a_1$, $s^2 - a^2 = 4b^2$, dann wird aus (4):

$$16 b^2 x^2 + 16 a_1^2 x^2 = 16 a_1^2 b^2$$

oder mit Weglassung des Index:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichung führt zu einer zweckmäfsigen Zeichnungsmethode. Man beschreibe mit dem Radius a einen Kreis, ziehe einen Durchmesser, darauf möglichst viele senkrechte Sehnen zum Durchmesser und teile sie alle nach dem Verhältnisse $b : a$. Die Teilpunkte liegen auf der gesuchten Ellipse.

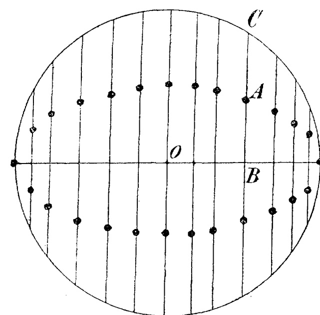


Fig. 63.

Beweis. $AB = y$, $OB = x$; also

$$CB : y = a : b, \text{ oder } CB = \frac{ay}{b}.$$

$$x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2.$$

Wäre man von der Gleichung $b - c = d$ ausgegangen, so würde man genau zu derselben Gleichung (4) gelangt sein, nämlich:

$$4(d^2 - a^2)\,x^2 + 4\,d^2 y^2 = d^2(d^2 - a^2).$$

Aber jetzt ist $d < a$; wir setzen also:

$$d^2 = 4\,a_1{}^2;\ \ a^2 - d^2 = 4\,b^2,$$

und finden als Gleichung der Hyperbel mit Weglassung des Index:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

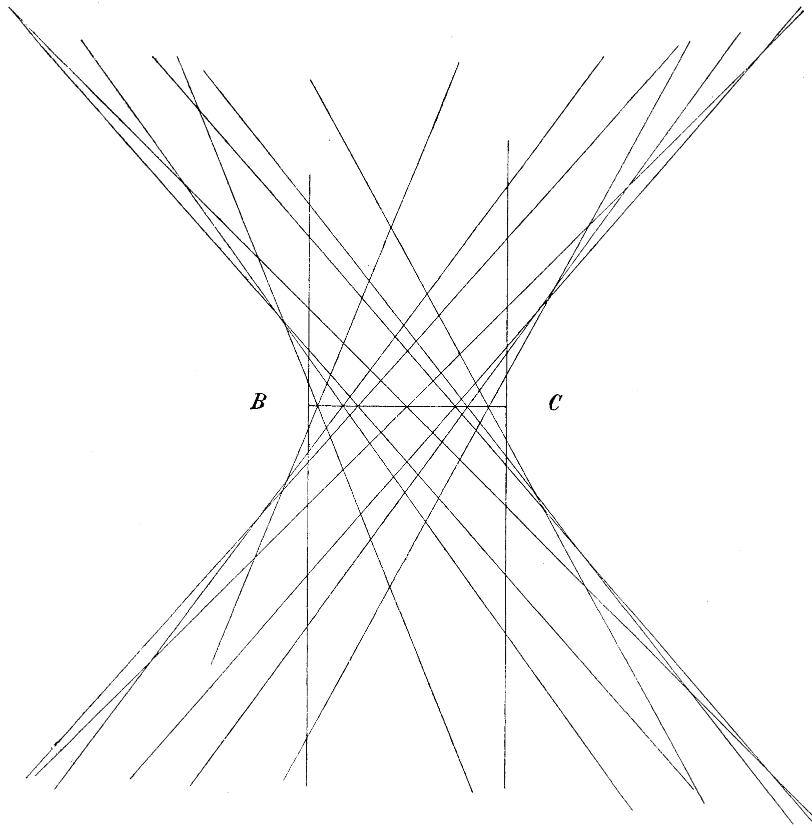


Fig. 64.

In vorstehender Figur haben wir die Hyperbel durch ihre Tangenten dargestellt. (Vgl. Aufgabe 47.) Der von den Tangenten erfüllte Raum enthält die Punkte P, für welche $PB - PC < d$ oder $PC - PB < d$ ist. In den weifsen Raum (das Innere der Kurve) dringt keine Tangente ein.

50.

Eine Parabel ist durch Brennpunkt und Leitlinie gegeben. Man ziehe eine Tangente an die Kurve.

1. A sei der Brennpunkt, L die Leitlinie, C ein Punkt der Parabel, also $AC = CB$, $CB \perp L$. Im Punkte C soll eine Tangente an die Parabel gezogen werden.

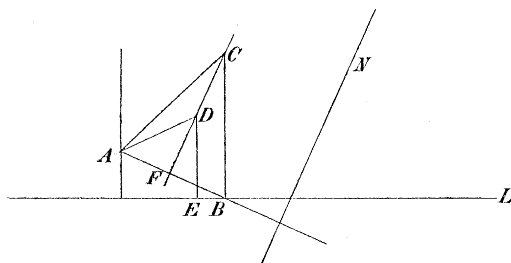


Fig. 65.

Lösung. Man halbiere den Winkel ACB, und die Halbierungslinie löst die Aufgabe.

Beweis. D sei ein anderer Punkt der Halbierungslinie. Dann ist Dreieck $CDA \cong CDB$, also $AD = DB$; es ist aber $DB > DE$, also

$$DE < DA. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zieht man nun durch D eine Parallele zu L und verschiebt D auf dieser Parallelen nach links hin, so wird DA kleiner; es wird also bald ein Punkt Q angetroffen werden, für den die Ungleichung (1) in die Gleichung

$$QE' = QA$$

übergeht, wo E' der Fufspunkt einer von Q auf L gefällten Senkrechten ist. Q ist also ein Punkt der Parabel. Hieraus folgt, dafs DC der Kurve nur im Punkte C begegnet, während alle Nachbarpunkte der Kurve links von DC liegen. Also ist DC eine Tangente der Kurve.

2. D sei ein beliebiger Punkt. Man ziehe von D aus eine Tangente an eine durch den Brennpunkt A und die Leitlinie L gegebene Parabel.

Lösung. Man beschreibe mit DA um D einen Kreis, welcher die Leitlinie im Punkte B treffen möge. Alsdann halbiere man den Winkel ADB oder errichte zu AB die Mittelsenkrechte. Dieselbe löst die Aufgabe.

Beweis. Man errichte in B zu L eine Senkrechte, welche die zu AB errichtete Mittelsenkrechte in C treffen möge. Dann ist Dreieck $CDA \cong CDB$, also $CA = CB$, folglich C ein Punkt der Parabel. Ferner halbiert DC den Winkel ACB und ist also

Tangente. Denn sie hat nur den Punkt C mit der Kurve gemeinsam, jeder andere Punkt P liegt so, dafs $PA > PE'$, wenn $PE' \perp L$. Alle Nachbarpunkte der Kurve liegen links von DC.

Einschränkung. Der um D beschriebene Kreis mufs L treffen, also mufs mindestens $DA = DE$ sein. Ist $DA < DE$, so ist die Lösung unmöglich. — Die Punkte der Ebene zerfallen durch die Parabel in drei Klassen. Für die erste ist der Abstand vom Brennpunkte gröfser als der Abstand von der Leitlinie. Diese Punkte liegen aufserhalb der Parabel, und von jedem Punkte aus kann man zwei Tangenten an die Kurve ziehen. Für die zweite ist der Abstand vom Brennpunkte gleich dem Abstande von der Leitlinie. Diese Punkte liegen auf der Parabel. In einem solchen Punkte kann man nur eine Tangente an die Kurve ziehen. Für die dritte ist der Abstand der Brennpunkte kleiner als der Abstand von der Leitlinie. Diese Punkte liegen innerhalb der Parabel, und von jedem solchen Punkte ist eine Tangente an die Kurve unmöglich.

3. N sei eine beliebige Richtung. Man ziehe parallel zu N an eine durch den Brennpunkt A und die Leitlinie L gegebene Parabel eine Tangente.

Lösung. Man fälle ein Lot von A auf N. Dasselbe schneide L in B. Die zu AB errichtete Mittelsenkrechte löst die Aufgabe.

Beweis. Man errichte in B zu L ein Lot, welches der Mittelsenkrechten in C begegnen möge. Dann ist $CFA \cong CFB$, also der Winkel bei C halbiert und wegen $CA = CB$, $CB \perp L$ der Punkt C ein Punkt der Parabel. Im übrigen ist der Beweis jetzt dem bei 1 und 2 geführten gleichlautend.

Einschränkung. Die Aufgabe ist immer lösbar. Ist $N \perp L$, so rückt der Punkt F unendlich fern und die betreffende Tangente gleichfalls. Eine unendlich ferne Gerade ist also Tangente der Parabel. Hierdurch sowie durch das Nichtauftreten paralleler Tangenten unterscheidet sich die Parabel wesentlich von Ellipse und Hyperbel. — Rückt B auf der Leitlinie fort, so bewegt sich F wegen $AF = BF$ auf einer zu L parallelen Geraden. Wir kommen also auf eine Eigenschaft zurück, die wir schon Aufgabe 30 erwähnt haben. Dieselbe ist der nachstehenden Zeichnung zu Grunde gelegt. (Fig. 66.)

Ein parabolischer Spiegel schickt einen von A ausgehenden Strahl nach seiner Zurückwerfung an jeder einzelnen Tangente DC in der Richtung der Achse fort. Alle Strahlen werden also nach der Zurückwerfung parallel. Umgekehrt vereinigen sich

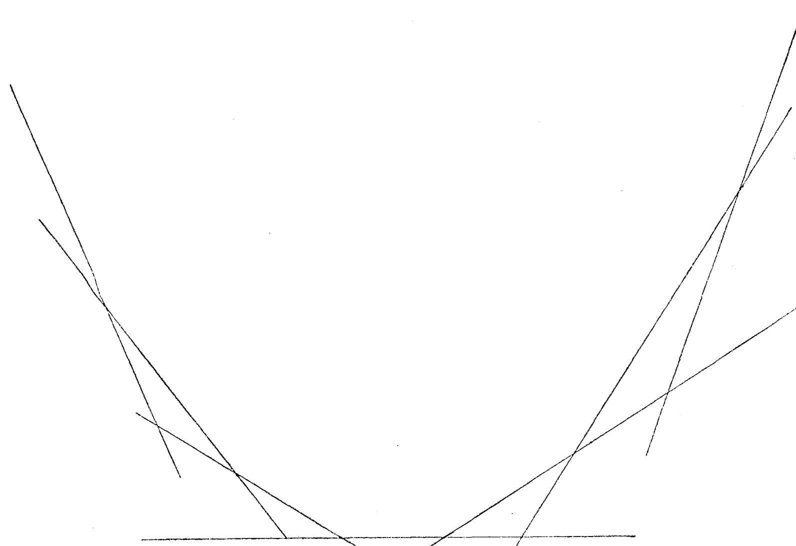


Fig. 66.

alle Strahlen, welche der Achse parallel einfallen, im Brennpunkte. Daher hat er seinen Namen.

51.

Auf eine gegebene Gerade sollen zwei gegebene Strecken *a* und *b* derartig aufgetragen werden, dafs vier harmonische Punkte entstehen.

Lösung. Vorstehende Aufgabe kann auf zwei Arten gelöst werden. Man kann die Strecken a und b so abtragen, dafs sie keinen Punkt gemeinsam haben, oder so, dafs ein gewisses Stück beiden angehört.

Im ersten Falle (Fig. 2) setzen wir $AD = a$, $BC = b$ und $DC = x$. Dann mufs sein $a : x = (a + b + x) : b$, oder

$$x(a + b + x) = ab. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Im zweiten Falle setzen wir $AC = a$, $DB = b$, und es mufs sein, wenn $DC = x$ gesetzt wird:

$$(a - x) : x = (b + a - x) : (b - x), \text{ oder}$$

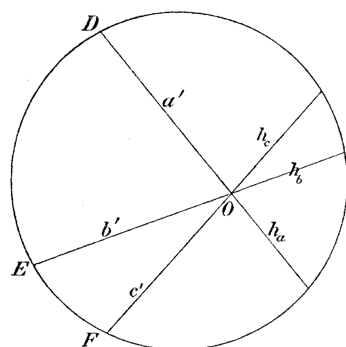
$$x^2 - (a + b)\ x = -\frac{ab}{2}.$$

Beide Aufgaben sind jetzt nach Aufgabe 31 weiter zu behandeln.

52.

Ein Dreieck zu zeichnen aus seinen drei Höhen h_a, h_b, h_c.

Lösung. Man lege die drei gegebenen Strecken mit ihren Endpunkten in O in übrigens beliebiger Lage zusammen. Man beschreibe alsdann einen Kreis, der durch die drei andern Endpunkte der Strecken bestimmt ist. Hierdurch hat man also drei neue Strecken OD, OE und OF gewonnen, welche wir durch a', b', c' entsprechend bezeichnen wollen. Aus den Strecken a', b', c' als Seiten bilden wir ein Dreieck, vergröfsern oder verkleinern dasselbe durch eine Parallele in dem Mafse, dafs h'_a, die zu a' gehörige Höhe, in h_a übergeht, dann löst das so entstehende Dreieck die Aufgabe.



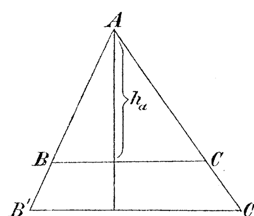


Fig. 67.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs die von B auf AC gefällte Senkrechte die Gröfse h_b hat und die von C auf AB gefällte die Gröfse h_c. Nennen wir die von B' und C' ausgehenden Höhen des Dreiecks $AB'C'$ bezüglich h'_b und h'_c, so ist:

$$a' \cdot h_a = b' \cdot h_b = c' \cdot h_c \text{ (nach d. Satze v. d. Pot. a. Kr.)}$$
$$a' \,.\, h'_a = b' h'_b = c' h'_c = 2J' \text{ (wenn } J' \text{ Inh. d. Dr. } AB'C'\text{)}.$$

Durch Division folgt also:

$$h_a : h'_a = h_b : h'_b = h_c : h'_c.$$

Nun ist Dreieck ABC die ähnliche Abbildung des Dreiecks $AB'C'$; geht demnach h'_a in h_a über, so geht das gleichliegende h'_b in h_b und h'_c in h_c über. Also hat ABC die verlangten Höhen.

Einschränkung. Die Aufgabe wird unlösbar, wenn aus den drei Stücken a', b', c' sich kein Dreieck bilden läfst.

Eine algebraische Lösung erhält man durch die Heronische Formel. Es ist:

$$4\,a^2 h_a^2 = (a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)\,(-a + b + c).$$

Ersetzt man nun b durch $\frac{a h_a}{h_b}$, c durch $\frac{a h_a}{h_c}$, so bleibt eine Gleichung mit einer Unbekannten a. Nach gehöriger Wegschaffung der Nenner erhält man links $4 h_a^2 h_b^4 h_c^4$, rechts als einen Faktor a^2, ferner vier Faktoren, deren erster $h_a h_c + h_a h_b + h_b h_c$ ist. Man kann jeden derselben in ein Quadrat verwandeln. Sind diese Quadrate α^2, β^2, γ^2, δ^2, so wird

$$a = \frac{2 h_a h_b^2 h_c^2}{\alpha \beta \gamma \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieser Ausdruck ist im Zähler fünfter, im Nenner vierter Dimension. Eine Gröfse nullter Dimension ist eine Zahl, eine Gröfse erster Dimension eine Strecke, eine Gröfse zweiter Dimension eine Fläche, eine Gröfse dritter Dimension ist ein Körper. Für eine Gröfse vierter und höherer Dimension fehlt die geometrische Darstellung. Der Quotient einer Gröfse m^{ter} durch eine Gröfse n^{ter} Dimension ist $(m - n)^{ter}$ Dimension. Nur gleichartige Gröfsen — Gröfsen von einerlei Dimension — kann man addieren oder subtrahieren. Um Gleichung (1) zu zeichnen, setzen wir

$$\varepsilon = \frac{h_b h_c}{\delta},$$

wodurch (1) in

$$a = \frac{2 h_a \cdot h_b \cdot h_c \cdot \varepsilon}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

übergeht. Zähler und Nenner haben beide eine um eins erniedrigte Dimension, und so kann man fortfahrend a finden.

53.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, wenn eine Kathete gegeben ist und die Projektion der andern Kathete auf die Hypotenuse.

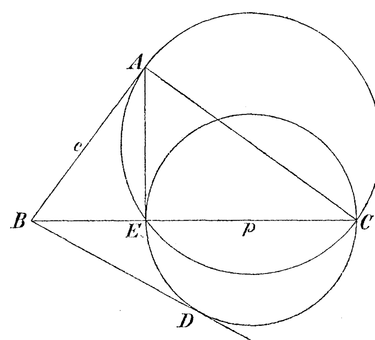


Fig. 68.

Lösung. Über der Projektion p als Durchmesser beschreiben wir einen Kreis, ziehen eine Tangente $DB = c$, hierauf den Durchmesser BEC, ziehen in E eine Tangente an diesen Kreis und beschreiben um B mit c einen Kreis. Er trifft die Tangente im Punkt A, und ABC löst die Aufgabe.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $\measuredangle BAC = 90^0$ ist. Wir legen durch die drei Punkte A, E, C einen Kreis. Da AEC ein rechter Winkel ist, so liegt der Mittelpunkt des Kreises auf AC,

und zwar in der Mitte. Jetzt brauchen wir nur zu zeigen, dafs BA Tangente des Kreises ist. Angenommen, BA sei nicht Tangente, dann müfste es den durch A, E, C gelegten Kreis in einem ferneren Punkte A' schneiden.

Dann wäre $BA \cdot BA' = BE \cdot BC$ (Kreis A, E, C);
es ist aber $BE \cdot BC = BD^2$,
also wäre $BA \cdot BA' = BD^2$
oder, weil $BA = BD$,
auch $BA' = BD$, ein Teil gleich dem Ganzen, w. u. i.

Einschränkung. Die Aufgabe ist unter allen Umständen lösbar. — Der um B mit c beschriebene Kreis schneidet die beiden Kreise der Figur rechtwinklig. Vgl. Aufgabe 25.

54.

Ein Kreisviereck aus seinen vier Seiten a, b, c, d zu zeichnen.

Man ziehe die Diagonale $AC = e$, dann ist nach dem Cosinussatz:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\varphi = c^2 + d^2 + 2cd \cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}. \qquad (1)$$

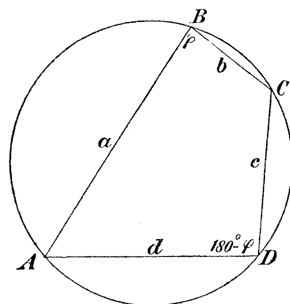


Fig. 69.

Jetzt stelle man $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = q^2$, sowie $ab + cd = p^2$ her, so hat man

$$\cos\varphi = \frac{q^2}{2p^2}.$$

Alsdann zeichne man $r = \frac{q^2}{2p}$, und es folgt:

$$\cos\varphi = \frac{r}{p}.$$

$Cos\,\varphi$ darf nicht die Einheit übersteigen. Man leitet aus (1) ab:

$$1 - \cos\varphi = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{2(ab + cd)}, \quad 1 + \cos\varphi = \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{2(ab + cd)}.$$

Durch Multiplikation ergiebt sich

$$4(ab + cd)^2 \sin^2\varphi = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$$
$$(a - b + c + d)(- a + b + c + d).$$

Setzt man $a + b + c + d = 2\sigma$ und bedenkt, dafs der Inhalt I des Kreisvierecks gegeben wird durch die Formel:

$$I = \tfrac{1}{2}\, ab \sin\varphi + \tfrac{1}{2}\, cd \sin\varphi,$$

so folgt: $I^2 = (\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)\,\sigma - d)$. . . (2)

55.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, h_a, α.

Man beschreibt über der Strecke a als Sehne einen Kreis, der den Winkel α fafst, und zieht zur Grundlinie im Abstande h_a eine Parallele, welche den Bogen in der gesuchten Spitze des Dreiecks trifft. Eines Beweises bedarf es nicht, da in der Zeichnung das Geforderte unmittelbar geleistet ist.

Fafst man die Aufgabe auf trigonometrischem Wege an mit Hülfe der Gleichungen:

$$I = \tfrac{1}{2}\, a h_a = \tfrac{1}{2}\, bc \sin \alpha\,;\; a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos \alpha,$$

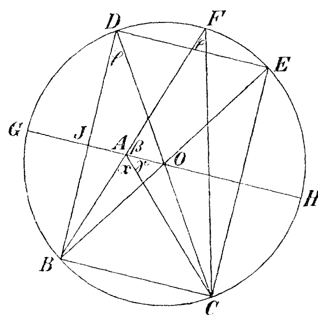


Fig. 70.

so ist die Lösung nicht eben die einfachste. Es erscheint daher nicht überflüssig, auch eine geometrische Ableitung der trigonometrischen Lösung zu geben.

In nebenstehender Figur ist $BC = a$, $BD = 2\, h_a$, $BJ = JD$, $\sphericalangle BDC = \varphi$. Dann ist auch $\sphericalangle BFC = \varphi$ und folglich $\sphericalangle ACF = \alpha - \varphi$. Nun ist ferner $\sphericalangle FAH = \beta$, weil $AH \parallel BC$, und $HAC = \gamma$ aus demselben Grunde. Daher $\sphericalangle FAE = \beta - \gamma$; denn $\sphericalangle EAH = CAH = \gamma$. Nun ist $\sphericalangle BFE = 90^0$ als Winkel im Halbkreis. Deshalb

$$\cos(\beta - \gamma) = \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AC} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Also erhalten wir die einfache Lösung:

$$tg\, \varphi = \frac{a}{2\, h_a},\;\; \cos(\beta - \gamma) = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Hierdurch erledigt sich zugleich die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus a, h_a, $\beta - \gamma$.

Geometrisch löst man diese Aufgabe durch Zeichnung des Dreiecks BCE; $BC = a$, $CE = 2\, h_a$, $BC \perp CE$. Alsdann zieht man im Abstande h_a zu BC eine Parallele, welche den über BE beschriebenen des Winkels $180^0 - (\beta - \gamma)$ fähigen Bogen im Punkte A trifft.

Für den Beweis erkennt man, wie oben, dafs $\sphericalangle FAE$, welcher durch die durchgeführte Zeichnung die Gröfe $\delta = \beta - \gamma$ erhalten hat, der Differenz der Dreieckswinkel bei B und C gleicht.

56.

Von einem Dreieck ist gegeben: die Grundlinie BC, der zugehörige Höhenfufspunkt D und die Bestimmung $\alpha = 2\beta$.

Lösung. Man beschreibe über BC als Durchmesser einen Kreis mit dem Mittelpunkte E. D sei der Fufspunkt der zugehörigen Höhe. Die Mittelsenkrechte zu ED treffe den Kreis in F. Dann trifft BF die durch D gegebene Senkrechte im gesuchten Punkte A.

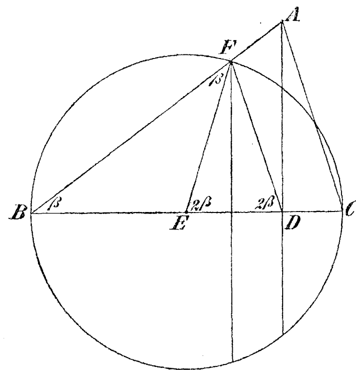


Fig. 71.

Beweis. Die Figur $FDCA$ ist ein Kreisviereck. Denn über FD als Sehne steht

$\sphericalangle FAD = 90^0 - \beta$, $(AD \perp BC)$,
$\sphericalangle FCD = 90^0 - \beta$, $(BF \perp FC)$;
folglich $\sphericalangle FDB = FAC = 2\beta$.

Einschränkung. Rückt D so weit nach rechts, dafs sein Abstand rechts von C aus gerechnet gleich dem Radius EC ist, so ist die Aufgabe noch gerade lösbar. Liegt D links von E, so ist es sofort klar, dafs $FADC$ ein Kreisviereck ist, da es zwei gegenüberliegende rechte Winkel bei F und D zeigt. Liegt D in B, so wird $\beta = 60^0$, $\alpha = 120^0$, und die Lösung ist Punkt B. Liegt D über B hinaus, so wird die Lösung uneigentlich: $\alpha = 180^0 - 2\beta$, für $DB > EB$ unmöglich. Für $DB = EB$ rückt A unendlich fern.

Greifen wir die Aufgabe rechnend an, so setzen wir: $BD = x$, $AD = y$, $\sphericalangle BAD = \delta$, $CAD = \varepsilon$; also $\delta + \varepsilon = \alpha = 2\beta$. Jetzt bedienen wir uns des Additionstheorems der Tangensfunktion:

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\; tg\,\beta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

Hieraus leiten wir durch

$$tg\,\varepsilon = \frac{a - x}{y}, \quad tg\,\delta = \frac{x}{y}, \quad \varepsilon + \delta = 2\beta$$

sofort ab $\qquad tg\,(2\beta) = \frac{a\,y}{y^2 + x^2 - a\,x}.$

Aus $\qquad tg\,\beta = \frac{y}{x}$

folgt andrerseits $\qquad tg\,(2\beta) = \frac{2\,xy}{x^2 - y^2}$,

mithin $\qquad 2\,x\,(y^2 + x^2 - a\,x) = a\,(x^2 - y^2)$

oder $\qquad 2\,x\,(x^2 + y^2) - 3\,a\,x^2 + a\,y^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$

Dies ist, durch eine Gleichung dargestellt, der geometrische Ort der Spitzen A aller Dreiecke ABC, für welche $BC = a$ und $\alpha = 2\beta$ ist. Für $y = 0$ wird $2x^3 = 3ax^2$, d. h. für $x = 0$ oder im Punkte B und für $x = \frac{3a}{2}$ d. h. im Abstande $\frac{a}{2}$ über C hinaus liegt A auf der Geraden BC — übereinstimmend mit der geometrischen Lösung.

Man kann auch die Aufgabe stellen, Dreiecke mit ganzzahligen Seiten anzugeben, so dafs $\alpha = 2\beta$ wird*. Der Verfasser hat diese Aufgabe vollständig gelöst (Gymnasialprogramm Coesfeld 1886). Als Beispiele seien erwähnt die Dreiecke mit den Seiten 4, 5, 6; 7, 9, 12; 9, 16, 20. Die allgemeine Lösung lautet: $b = q^2$, $a = pq$, $c = p^2 - q^2$ (p und q bel. ganze Zahlen). Übrigens ist dort auch die Aufgabe gelöst, welche verlangt, rationale Dreiecke anzugeben, in denen zwei Winkel in einem beliebigen rationalen Verhältnisse zu einander stehen.

57.

Ein Punkt O im Innern eines Dreiecks ist durch das Gewicht P beschwert. Wieviel hat jede Ecke zu tragen?

Angenommen, die drei Ecken (Fig. 9) mögen der Reihe nach die Gewichte P_a, P_b, P_c in A, B, C zu tragen haben. Dann ist

$$P_a + P_b + P_c = P. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die beiden in B und C ruhenden Gewichte können wir durch ein einziges $P_b + P_c$ ersetzen, welches in α angebracht ist.

Daher mufs sein $$P_b \cdot \alpha B = P_c \cdot \alpha C. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Aus analogem Grunde ergiebt sich

$$(P_b + P_c) \cdot O\alpha = P_a \cdot OA. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die drei Unbekannten P_a, P_b, P_c sind hiernach durch drei Gleichungen bestimmt. Genau wie Gleichung (2) findet man auch

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{P_c}{P_b}; \ \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{P_a}{P_c}; \ \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{P_b}{P_a}.$$

Die Multiplikation dieser Gleichungen liefert einen trefflichen Beweis des Cevaschen Satzes. Man findet aus denselben auch

$$P_a\left(1 + \frac{\beta A}{\beta C} + \frac{\gamma A}{\gamma B}\right) = P.$$

---

* Die Aufgabe, ein Dreieck so zu bestimmen, dafs $\alpha = 2\beta$ wird und die Seiten desselben in arithmetischer Progression stehen, rührt von Boner her. Gymnasialprogr. Münster i. W. 1845.

58.

Gegeben ein Winkel α und ein Punkt P. Man soll durch P eine Gerade so ziehen, dafs ein Dreieck vom vorgeschriebenen Inhalte q^2 abgeschnitten wird.

Lösung. Am natürlichsten verfährt man rechnend. Die von P (Fig. 72) auf die Schenkel gefällten Senkrechten seien $PD = d$, $PE = e$. Dann erscheint BAC als Differenz der Dreiecke PAC und PAB.

Folglich ist $$be - cd = 2q^2. \qquad (1)$$

Andrerseits ist $$bc \sin\alpha = 2q^2. \qquad (2)$$

Hieraus folgt für b die quadratische Gleichung:

$$b^2 - \frac{2q^2}{e} b = \frac{2q^2 d}{e \sin\alpha}. \qquad (3)$$

Man zeichnet die Strecke $\frac{q^2}{e}$ (Aufgabe 23), dann $\frac{d}{\sin\alpha}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit d als dem Winkel α gegenüberliegender Kathete und verwandelt das Rechteck $2 \cdot \frac{q^2}{e} \cdot \frac{d}{\sin\alpha}$ in ein Quadrat (Aufgabe 33). Dann haben wir den zweiten Fall der Aufgabe 31 vor uns. Die Aufgabe ist immer lösbar, und sogar die negative Auflösung hat einen Sinn. Diese zweite Auflösung wird von den Schenkeln des Scheitelwinkels abgeschnitten.

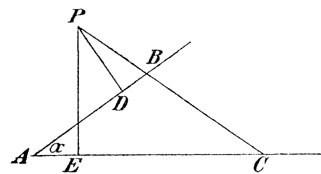


Fig. 72.

Liegt P zwischen den Schenkeln, so ist d in entgegengesetztem Sinne abgetragen, und statt (3) entsteht

$$b^2 - \frac{2q^2}{e} b = - \frac{2q^2 d}{e \sin\alpha}.$$

Jetzt wird die Aufgabe unlösbar, sobald $q^2 < \frac{2de}{\sin\alpha}$ ist. Um diesen Ausdruck geometrisch zu deuten, verbinden wir (Fig. 73) A mit P, verlängern AP um sich selbst bis F und ziehen durch F zu den Schenkeln des Winkels α Parallele. So entsteht das Parallelogramm $AGFH$.

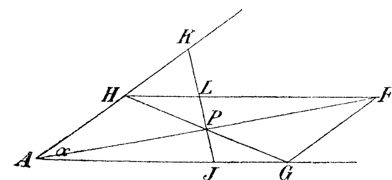


Fig. 73.

Die von H auf AG gefällte Senkrechte ist doppelt so grofs als die von P auf AG gefällte, also gleich $2e$; ebenso ist die von G auf AH gefällte Senkrechte gleich $2d$, also $AG = \frac{2d}{\sin\alpha}$.

Folglich ist der Inhalt des Dreiecks $HAG = \frac{2de}{\sin \alpha}$. Mithin sind wir zu folgenden Ergebnissen gelangt:

Es ist die Aufgabe gelöst: Zwischen den Schenkeln eines Winkels α ist ein Punkt P gegeben. Man soll durch P eine Gerade HG so ziehen, dafs das zwischen den Schenkeln liegende Stück durch P halbiert wird.

Das so abgeschnittene Dreieck HAG ist das kleinste von allen, die sich durch eine den Punkt P durchsetzende Gerade von den Schenkeln abschneiden lassen.

Ist der gegebene Inhalt in unserer Aufgabe 58 kleiner als der Inhalt dieses Dreiecks, so ist die Aufgabe unlösbar. Sonst liefert sie zwei Lösungen.

Ein einfacher Beweis für die Behauptung, dafs AHG ein Minimum ist, ergiebt sich, wie folgt:

$HLP \cong GJP$. Also hat das beliebige Dreieck AKJ über AHG den Überschufs HLK; also ist $AKJ > AHG$, w. z. b. w.

Vorstehende Aufgabe 58 hängt mit den Eigenschaften der Tangenten einer Hyperbel bezüglich ihrer Asymptoten genau zusammen.

59.

Ein Halbkreis soll mit seinen Endpunkten so auf die Schenkel eines gegebenen Winkels gelegt werden, dafs er durch einen gegebenen Punkt geht und sein Durchmesser eine gegebene Richtung erhält.

Lösung. Man ziehe $B'C'$ parallel der gegebenen Richtung, verbinde A mit dem gegebenen Punkte D, AD treffe den über $B'C'$ beschriebenen Halbkreis in D'. Dann ziehe man $DC \parallel D'C'$, $DB \parallel D'B'$, und der über BC beschriebene Halbkreis löst die Aufgabe.

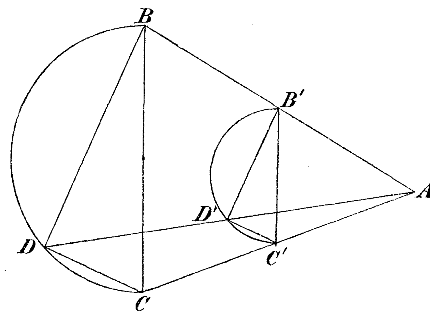


Fig. 74.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dafs $BC \parallel B'C'$ ist. $AD'D$ schlägt die Brücke. Es ist

einerseits $AD' : AD = D'B' : DB = AB' : AB$,
andrerseits $AD' : AD = D'C' : DC = AC' : AC$.

Also ist $$AB' : AB = AC' : AC,$$
folglich $$BC \parallel B'C'.$$

Die Aufgabe und ihre Lösung bieten wieder eine Anwendung der ähnlichen Abbildung. Sie kann als Vorbild für die zahlreichen Aufgaben dienen, welche das Einzeichnen einer Figur in eine andere unter gewissen Bedingungen fordern. Indem wir an die Aufgaben 28, 30 und 40 erinnern, seien hier noch genannt:

Ein Quadrat in ein Dreieck zu zeichnen, so daſs zwei Ecken auf einer Seite des Dreiecks liegen.

Ein Quadrat in einen Kreissektor, in ein Kreissegment zu beschreiben (unter näherer Bestimmung der Lage).

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Auf 59 kann man die von J. Petersen gestellte Aufgabe zurückführen: In ein gegebenes Dreieck ABC einen Halbkreis zu beschreiben, der AC in gegebenem Punkte D berührt und dessen andere beiden Endpunkte auf den Seiten AB und BC liegen. (Methoden und Theorien Aufgabe 191, wo die Lösung ebenfalls angedeutet ist.)

60.

Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b + c$, $h_b + h_c$.

Vorbereitung. Wenn man $b + c$ in der Figur durch Verlängerung von BA über A hinaus um AC herstellt und ebenso $h_b + h_c$ durch Verlängerung von BD über D hinaus um CE, so wird die Verbindungslinie der so erhaltenen Endpunkte zu der Dreiecksseite AC parallel.

Fig. 75.

Lösung. Man zeichne das bei F rechtwinklige Dreieck BFG, in welchem $BF = s_1 = h_b + h_c$, $BG = s = b + c$ ist. Die Halbierungslinie des Winkels α bei G trifft jetzt den um B mit a beschriebenen Kreis in dem gesuchten Dreieckspunkte C und die durch C zu GF gezogene Parallele die Seite BG im Punkte A.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs $AC = AG$ und $CE = DF$ ist. Das Dreieck AGC ist gleichschenklig; denn der Aufsenwinkel bei A ist α und der eine Innenwinkel bei G ist $\frac{\alpha}{2}$, folglich bleibt für den andern bei C auch $\frac{\alpha}{2}$ übrig. Mithin ist $AC = AG$. Zieht man nun $AH \parallel DF$, so ist Dreieck $GHA \cong AEC$, also $AH = DF = EC$.

Einschränkung. Es mufs sein: 1) $s_1 \leqq s$. 2) $s \cdot sin\frac{\alpha}{2} \leqq a$. Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf den Gleichungen:

$$sin\,\alpha = \frac{h_b}{c} = \frac{h_c}{b}.$$

Denn hieraus zieht man sofort $b : c = h_c : h_b$, $b : h_c = s : s_1$, also

$$sin\,\alpha = \frac{s_1}{s}.$$

Hierdurch ist die Aufgabe auf 15 zurückgeführt, was auch unsere geometrische Lösung deutlich verrät. Beachtet man, dafs statt der Höhensumme die Höhendifferenz ebensowohl in die vorstehenden Verhältnisgleichungen eintreten kann, um α zu bestimmen, dafs ferner α in Verbindung mit r dasselbe leistet wie α in Verbindung mit a, so kann man eine Menge Aufgaben bilden, welche in derselben Weise gelöst werden wie die vorstehende.

Zweiter Teil.

Aufgaben aus der Stereometrie.

61.

Eine dreiseitige Pyramide ist durch ihre sechs Kanten gegeben. Man fälle von einer Ecke aus eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Ebene.

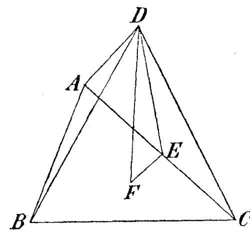


Fig. 76.

Vorbereitung. Fällt man von D aus auf AC eine Senkrechte, errichtet dann im Punkte E, dem Fuſspunkte der Senkrechten DE eine der Ebene ABC angehörige Senkrechte, so ist letztere ein geometrischer Ort für den Fuſspunkt der von D auf die Ebene ABC gefällten Senkrechten. Einen zweiten geometrischen Ort erhält man, wenn man von D auf AB statt auf AC eine Senkrechte herabläſst u. s. w.

Lösung. Wir führen für die sechs Kanten folgende bleibende Bezeichnungen ein (Fig. 76):

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ DA = f,\ DB = g,\ DC = h.$$

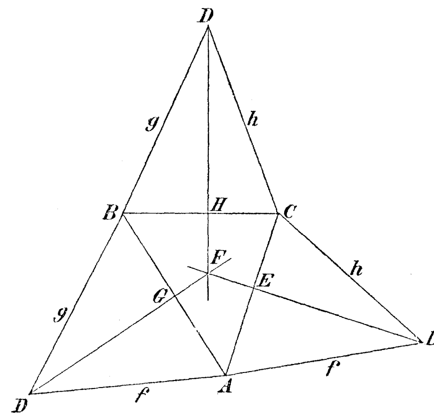


Fig. 77.

Hierauf zeichnen wir das Dreieck ABC aus seinen drei Seiten und beschreiben über denselben als Grundlinien nach auſsen hin drei Dreiecke DBC, DCA, DBA, wie Fig. 77 zeigt. Die von den Spitzen D auf die Seiten des Dreiecks ABC gefällten Senkrechten treffen sich in einem Punkte F, dem Höhenfuſspunkte der Pyramide. Zeichnet man nun ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse DE und der einen Kathete EF, so ist die andere Kathete DF die gesuchte Höhe der Pyramide. (DE und EF aus Fig. 77.)

Die Grundlage der Lösung bildet der Satz: Fällt man von einem Punkte aufserhalb einer Ebene auf eine in einer Ebene liegende Gerade ein Lot, errichtet dann im Fufspunkte des Lotes eine der Ebene angehörige Senkrechte zu der in der Ebene liegenden Geraden und fällt dann von dem aufserhalb der Ebene liegenden Punkte auf die letztere Senkrechte ein Lot, so ist dieses Lot senkrecht zur Ebene.

Fafst man die Fig. 77 rein planimetrisch auf, so haben wir drei Kreise mit den Radien f, g, h um die Punkte A, B, C beschrieben und die Linien DF sind die drei gemeinsamen Sekanten, welche sich in einem Punkte, dem Potenzcentrum der drei Kreise schneiden. (Aufgabe 25.)

Man kann sich den stereometrischen Hauptsatz durch folgende Vorstellung sehr anschaulich machen. Man denke sich (Fig. 76) Dreieck DAC um AC als Axe herumbewegt, bis D in die Ebene ABC gelangt. Dann bleibt DE während dieser Bewegung immer senkrecht zur Axe und gelangt endlich in dieselbe Richtung mit EF. Hieraus folgt natürlich auch die obige Lösung.

Um die Gröfse der Höhe DF (Fig. 76) zu bestimmen, beachten wir, dafs $DF^2 = DE^2 - EF^2$ ist. Dies ist nach Fig. 77 nichts anderes als $CD^2 - CF^2 = (CD + CF)(CD - CF)$. Verbindet man jetzt C mit F, so sieht man, dafs vorstehender Ausdruck nichts anderes ist als die Potenz des Punktes F in Bezug auf den um C mit h beschriebenen Kreis, und da F das Potenzcentrum ist, so ist also das Quadrat der Tetraederhöhe nichts anderes als die Potenz des Höhenfufspunktes in Bezug auf unsere drei Kreise.

Dieser aus der Zeichnung in der Ebene abgelesene Satz kann mit Leichtigkeit aus der körperlichen Figur abgeleitet werden. Es besteht nämlich analog dem Satze von der Potenz am Kreise ein Satz über die Kugel: Zieht man durch einen Punkt Gerade, welche eine Kugel schneiden, so ist das Rechteck, gebildet aus den Abständen des Punktes von den Kugelschnittpunkten, immer dasselbe, die Potenz des Punktes in Bezug auf die Kugel. Beschreiben wir nun um die Punkte A, B, C mit den Radien f, g, h Kugeln, so schneiden sich diese drei Kugeln in zwei Punkten, welche von der Ebene ABC gleichen Abstand nach entgegengesetzter Richtung haben. Folglich ist das Quadrat von DF die gemeinsame Potenz des Punktes F in Bezug auf die drei Kugeln.

Hiermit haben wir die Aufgabe gelöst: Gegeben drei Kugeln durch ihre Mittelpunkte und ihre Radien. Man bestimme den Punkt, in welchem die gemeinsame Sehne der drei Kugeln die Mittelpunktsebene trifft, und die Gröfse dieser Sehne.

Eine Kugel wird von einer Ebene in einem Kreise geschnitten. Zwei Kugeln schneiden einander in einem Kreise. Eine Ebene berührt eine Kugel, wenn der Abstand der Ebene vom Mittelpunkte der Kugel gleich dem Radius ist, und umgekehrt. Zwei Kugeln berühren einander, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich der Summe oder der Differenz der Radien ist, und umgekehrt.

62.

Gegeben drei Kugeln durch ihre Mittelpunkte und ihre Radien. Man bestimme eine Ebene, welche alle drei Kugeln berührt.

Vorbereitung. Wenn eine Ebene zwei Kugeln berührt, so stehen in beiden Berührungspunkten die Radien der beiden Kugeln zu derselben Ebene senkrecht. Folglich sind die beiden Radien einander parallel und liegen in einer Ebene, welche zur berührenden Ebene senkrecht steht. Diese Ebene schneidet aus beiden Kugeln zwei Hauptkreise, und ihre Schnittlinie mit der Berührungsebene ist gemeinsame Tangente der beiden Hauptkreise. Also liegt der Ähnlichkeitspunkt der beiden Hauptkreise in der berührenden Ebene. Dieser Ähnlichkeitspunkt teilt die Centrale im Verhältnisse der Radien. Er ist also unveränderlich für alle Hauptkreise, die wir in obiger Weise erhalten können. Wenn wir also an zwei Kugeln alle möglichen gleichartig berührenden Ebenen legen, so schneiden sich diese Ebenen alle in einem Punkte, dem Ähnlichkeitspunkte der beiden Kugeln. Man erhält einen innern und einen äufsern Ähnlichkeitspunkt.

Wenn nun eine Ebene drei Kugeln berührt, so geht sie durch drei Ähnlichkeitspunkte der drei Kugeln. Berührt sie z. B. alle drei Kugeln, ohne zwischen ihnen durchzugehen, so schneidet sie die Mittelpunktsebene in der äufsern Ähnlichkeitsaxe. Hiermit wäre die Schnittlinie der Ebene bestimmt. Die Ebene wäre völlig bekannt, wenn wir nun noch ihren Neigungswinkel zur Mittelpunktsebene bestimmen könnten. Zu diesem Zwecke

fällen wir von dem einen Kugelmittelpunkte A auf die Ähnlichkeitsaxe, die Schnittlinie der beiden Ebenen, eine Senkrechte. Den Fufspunkt der Senkrechten verbinden wir mit dem Berührungspunkte der Ebene an der Kugel A. Dann ist diese Verbindungslinie die Projektion der Senkrechten und steht folglich auch senkrecht zur Schnittlinie. Diese beiden Senkrechten bilden den Neigungswinkel der Mittelpunktsebene mit der berührenden Ebene.

Lösung. Man wähle die Mittelpunktsebene als Ebene der Zeichnung. Dieselbe schneidet die Kugeln in drei Hauptkreisen. Wir bestimmen die vier Ähnlichkeitsaxen der Kreise. Dann gehen durch jede der vier Ähnlichkeitsaxen zwei die drei Kugeln berührende Ebenen. Um den Neigungswinkel einer solchen Berührungsebene zu bestimmen, zeichnen wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse der Abstand des Mittelpunkts A von der betreffenden Ähnlichkeitsaxe, dessen eine Kathete der Radius der Kugel A ist. Der gesuchte Winkel ist derjenige, welcher dieser Kathete gegenüberliegt. Man sehe Dreieck ADG der Fig. 78.

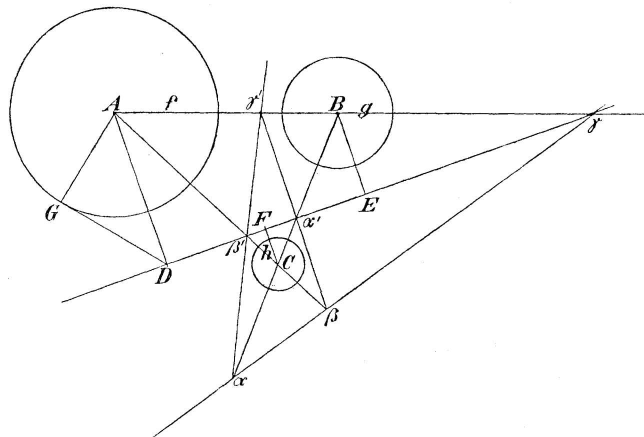


Fig. 78.

Aus unseren stereometrischen Betrachtungen folgt der planimetrische Satz: Die Ähnlichkeitspunkte von drei Kreisen liegen je drei in gerader Linie. Da man hat:

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} = \frac{h}{g}, \quad \frac{\gamma B}{\gamma A} = \frac{g}{f}, \quad \frac{\beta A}{\beta C} = \frac{f}{h},$$

so beweist man dasselbe durch den Cevaschen Satz. In der Zeichnung des rechtwinkligen Dreiecks liegt eine Willkür. Wir hätten von B und C ebenso gut ausgehen können wie von A. Der Sinus des Neigungswinkels ist aber in jedem Falle derselbe.

Denn es ist $\frac{f}{AD} = \frac{g}{BE} = \frac{h}{CF}$,

weil $\frac{AD}{BE} = \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{f}{g}$ ist u. s. w.

Vorstehende Aufgabe verlangt Erinnerung an folgende Sätze:

Stehen zwei gerade Linien zu derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel. Umkehrung.

Steht eine gerade Linie zu einer Ebene senkrecht, so steht auch jede das Lot enthaltende Ebene zu dieser Ebene senkrecht.

Steht eine in einer Ebene liegende Gerade zur Projektion einer schiefen Linie auf die Ebene der Geraden senkrecht, so steht sie auch senkrecht zu der projizierten schiefen Linie. Umkehrung.

Ferner ist die Erklärung des Neigungswinkels zu beachten. Er ist das Mafs des Flächenwinkels; denn, wird der Flächenwinkel n mal gröfser, so wird auch der Neigungswinkel n mal gröfser. Er wird gezeichnet, indem man einen Punkt der Schnittlinie (Kante) der den Flächenwinkel bildenden Halbebenen herausgreift und in diesem Punkte zur Kante zwei Senkrechte errichtet, welche in den beiden Halbebenen liegen. Es ist gleichgültig, welchen Punkt der Kante man wählt; denn: Sind die Schenkel zweier (in verschiedenen Ebenen liegenden) Winkel paarweise parallel und gleichgerichtet, so sind die Winkel einander gleich.

63.

Gegeben die drei Seiten einer körperlichen Ecke. Man finde die Winkel durch Zeichnung und Rechnung.

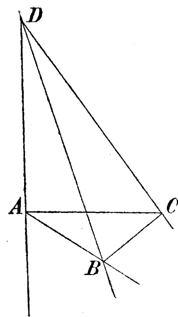


Fig. 79.

Vorbereitung. Es sei $BA \perp DA$, $CA \perp DA$, $\measuredangle BDC = \alpha$, $BDA = \gamma$, $CDA = \beta$. Dann ist $\measuredangle CAB = A$ der gesuchte Neigungswinkel. Da DA willkürlich angenommen werden kann, so setzen wir $DA = 1$. Dann sind die Dreiecke DAB und DAC durch Zeichnung und Rechnung bestimmbar. Wir gewinnen so die vier Strecken AB, DB, AC, DC. Jetzt ist das Dreieck BDC aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, hierdurch endlich das Dreieck BAC aus den drei Seiten bestimmbar, und so erhalten wir $\measuredangle A$.

Lösung. Man stelle zwei rechtwinklige Dreiecke her mit der gemeinsamen Kathete DA und den in D anliegenden Winkeln γ und β. Die Strecken DB, DC, welche man dadurch erhält, trage man auf den Schenkeln des Winkel α ab. Um die gewonnenen Endpunkte beschreibe man mit den durch die erste Figur gegebenen Strecken AB und AC Kreise. Ihr Schnittpunkt ist A, und $\measuredangle BAC$ löst die Aufgabe.

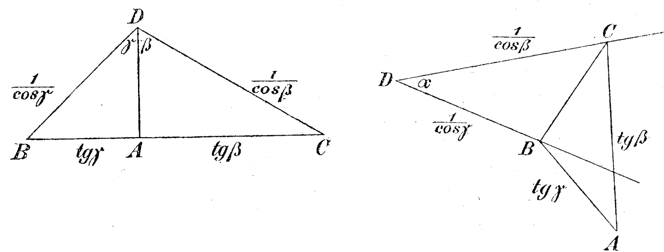


Fig. 80.

Zweite Lösung durch Rechnung. Dieselbe ist bereits angedeutet in der Fig. 80. Sie folgt genau der Zeichnung. Wenden wir den Cosinussatz an, so erhalten wir:

$$BC^2 = \frac{1}{cos^2\beta} + \frac{1}{cos^2\gamma} - 2\frac{cos\alpha}{cos\beta\, cos\gamma} = tg^2\beta + tg^2\gamma - 2\frac{sin\beta\, sin\gamma}{cos\beta\, cos\gamma}\cdot cos A.$$

Nun ist $\quad \frac{1}{cos^2\beta} - tg^2\beta = \frac{1 - sin^2\beta}{cos^2\beta} = 1$

und ebenso $\quad \frac{1}{cos^2\gamma} - tg^2\gamma = 1.$

Folglich erhält man

$$cos\alpha = cos\beta\, cos\gamma + sin\beta\, sin\gamma\, cos A \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und daraus $\quad cos A = \frac{cos\alpha - cos\beta\, cos\gamma}{sin\beta\, sin\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

Satz (1) oder auch (2) heifst Cosinussatz der Ecke.

Einschränkung. Wenn $\alpha = \beta + \gamma$, so ist die Fig. 80 links zugleich die Lösung und $\measuredangle A = 180^0$. Ist $\alpha = \beta - \gamma$, so tragen wir AB von A aus (Fig. 80 links) auf AC ab und haben dann auch die Lösung vor uns, aber $\measuredangle A = 0$. Wir haben also die Einschränkungen: $\quad \alpha < \beta + \gamma,\ \alpha > \beta - \gamma.$
Hierbei erinnern wir uns des Satzes: In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte, und die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Unsere Zeichnung verlangt, dafs die Winkel β und γ spitz seien. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die Aufgabe

darum nicht unlösbar. Denn, verlängert man die Kanten AD, BD, CD über D hinaus, so entstehen um den Punkt D herum acht dreiseitige Ecken, welche man Nebenecken (zwei Kanten gemeinsam, statt der dritten die Verlängerung), Gegenecken (eine Kante gemeinsam, statt der anderen die Verlängerungen) oder Scheitelecken (statt der Kanten die Verlängerungen) heifsen kann. — Hat die ursprüngliche Ecke die Seiten α, β, γ und die Winkel A, B, C; so hat eine Nebenecke die Seiten $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, γ und die Winkel $180^0 - A$, $180^0 - B$, C. Ist also β stumpf, γ spitz, so kann man durch Zeichnung für die Nebenecke die Aufgabe lösen. Eine Gegenecke hat die Seiten α, $180^0 - \beta$, $180^0 - \gamma$ und die Winkel A, $180^0 - B$, $180^0 - C$. Wenn β und γ stumpf sind, so wird man sich bei der Zeichnung dieser Gegenecke bedienen. Es ist nützlich, sich durch die Anwendung der Formeln auf Nebenecke und Gegenecke zu überzeugen, dafs die rechnerische Lösung unverändert gilt. So ist

$$\cos(180^0 - A) = \frac{\cos(180^0 - \alpha) - \cos(180^0 - \beta)\cos\gamma}{\sin(180^0 - \beta)\sin\gamma}$$

für die Nebenecke, und dies stimmt mit Formel (2).

Wendet man nach Rausenberger (Elementargeometrie) den Satz von der Summe zweier Seiten auf die Nebenecke an, so wird

$$180^0 - \beta + 180^0 - \alpha > \gamma,$$
$$360^0 > \alpha + \beta + \gamma.$$

Die Seitensumme einer dreiseitigen körperlichen Ecke ist kleiner als vier Rechte.

Durch ganz analoge Betrachtungen, wie zu Aufgabe 63, löst man die folgende: Durch Zeichnung und Rechnung eine körperliche Ecke von drei Seiten zu bestimmen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Man bestimmt zunächst die dritte Seite.

64.

Eine dreiseitige körperliche Ecke soll durch Zeichnung und Rechnung bestimmt werden, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind. Gegeben: γ, A, B.

Vorbereitung. Wir bezeichnen, wie immer,

$$\sphericalangle CDA = \beta,\ CDB = \alpha,\ ADB = \gamma.$$

Dann fällen wir auf BDA eine Senkrechte CE, fällen $EB \perp DB$, $EA \perp DA$. Dann sind CA und CB als projizierte Schiefe zu

DA und DB senkrecht, nach der Vorschrift zur Zeichnung der Neigungswinkel also $\sphericalangle CAE = A$, $\sphericalangle CBE = B$. Nehmen wir nun $CE = 1$ willkürlich an, so wird Dreieck CEA, ferner CEB und dadurch das rechtwinklige Kreisviereck $BDAE$ bestimmbar. Jetzt können wir die Dreiecke CAD, CBD zeichnen und erhalten so die gesuchten Seiten α, β.

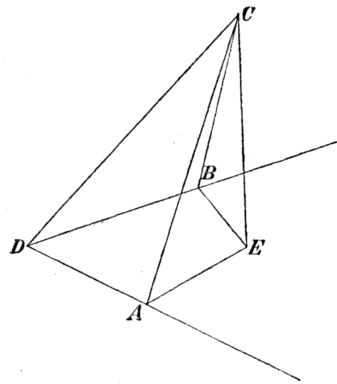


Fig. 81.

Lösung. Zunächst sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke CEB und CEA aus der gemeinsamen, beliebig gewählten Strecke $CE = 1$ und den beiden Winkeln B und A gezeichnet. Dieser Figur entnehmen wir die vier Strecken BE, AE, CB, AC, ziehen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels γ in den Abständen BE, AE Parallelen,

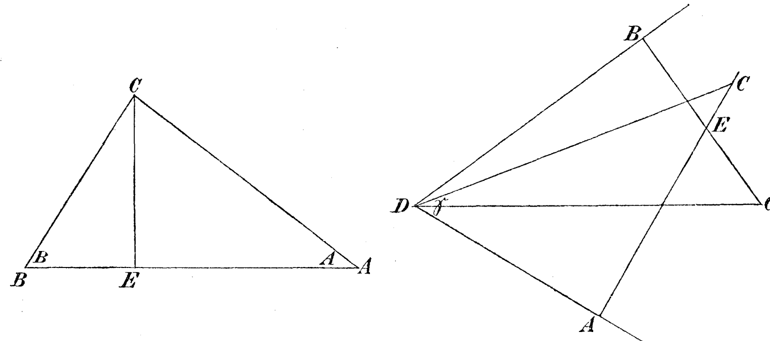


Fig. 82.

welche sich in E schneiden. Wir machen jetzt BE und AE durch Verlängerung gleich den aus der andern Figur (82 links) entnommenen Strecken AC und BC und finden so $\sphericalangle CDA = \beta$, $CDB = \alpha$.

Einschränkung. Die Zeichnung setzt voraus, dafs die Winkel A und B spitz sind. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so zeichnen wir im Anschlufs an die Nebenecke beziehungsweise die Gegenecke. Im übrigen unterliegt die Lösbarkeit der Aufgabe keiner Einschränkung.

Lösung durch Rechnung. Wir schicken die Behandlung des rechtwinkligen Kreisvierecks voraus.

Sei $CB = a$, $CD = b$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $AB = y$, $AD = x$. Wir verlängern BA bis E. Dann ist:

$$AE = \frac{x}{cos\gamma}, \quad DE = x\,tg\gamma,$$

$$CE = \frac{a}{cos\gamma} = b + x\,tg\gamma.$$

Folglich $x = \dfrac{a - b\,cos\gamma}{sin\gamma}$;
ebenso $y = \dfrac{b - a\,cos\gamma}{sin\gamma}$. (1)

Ferner ist:

$$AC^2 = a^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\gamma}{sin^2\gamma}. \qquad (2)$$

Fig. 83.

Wenden wir das Gefundene auf $DBEA$ (Fig. 81) an. Hier ist $BE = cot B$, $AE = cot A$, $\sphericalangle BEA = 180^0 - \gamma$. Daher

$$AD = \frac{cot B + cos\gamma\,cot A}{sin\gamma}.$$

Ferner ist $AC = \dfrac{1}{sin A}$, mithin

$$cot\beta = \frac{cot B + cos\gamma\,cot A}{sin\gamma} \cdot sin A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

An dieser Figur kann man noch eine wichtige Beziehung leicht auffinden. Es ist:

$AC = DC\,sin\beta$; $CE = AC\,sin A$, also $CE = DC\,sin\beta\,sin A$;
$BC = DC\,sin\alpha$; $CE = BC\,sin B$, also $CE = DC\,sin\alpha\,sin B$.

Daraus folgt: $$sin\beta\,sin A = sin\alpha\,sin B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{sin A}{sin\alpha} = \frac{sin B}{sin\beta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dieser Satz heifst der Sinussatz der Ecke.

65.

Eine dreiseitige körperliche Ecke soll durch Zeichnung und Rechnung bestimmt werden aus den drei Winkeln.

Vorbereitung. Die Bezeichnungen zu Fig. 81 bleiben bestehen:

$\sphericalangle CDB = \alpha$, $ADC = \beta$, $BDA = \gamma$;
$CE \perp DBEA$, $EA \perp AD$, $EB \perp DB$.

Daher $\sphericalangle CBE = B$, $CAE = A$.

Ferner ist $EG \perp AC$, also auch zur Ebene CDA (Aufgabe 61),
$EF \perp BC$, „ „ „ „ CDB (Aufgabe 61).
Endlich $EH \perp DC$, „ „ $HF \perp DC$, $HG \perp DC$,
$\measuredangle FHG = C$.

Verlängern wir nun CE über E hinaus nach C' (nicht gezeichnet), so ist in E eine Ecke entstanden mit den Kanten $EF \perp CDB$, $EG \perp CDA$, $EC' \perp BDA$. Diese Ecke, deren Kanten auf den Ebenen der ursprünglichen Ecke nach aufsen hin senkrecht stehen, heifst die Polarecke der ursprünglichen. Ihre Seiten sind $\measuredangle GEF = 180^0 - C$, $GEC' = 180^0 - A$, $FEC' = 180^0 - B$. Ihre Winkel sind $HGA = 180^0 - \beta$, $HFB = 180^0 - \alpha$, $BEA = 180^0 - \gamma$; denn z. B. HG und GA stehen auf GE, der Durchschnittskante der Ebene FEG, und EGC' in G senkrecht und liegen bezüglich in diesen Ebenen*.

Fig. 84.

Daher haben wir die Zusammenstellung:

	Ecke.	Polarecke.		Ecke.	Polarecke.
Seiten	α . . .	$180^0 - A$,	Winkel	A . . .	$180^0 - \alpha$,
	β . . .	$180^0 - B$,		B . . .	$180^0 - \beta$,
	γ . . .	$180^0 - C$.		C . . .	$180^0 - \gamma$.

Verfahren wir jetzt zunächst rechnend.

Lösung. Sei $CE = 1$; dann ist $FE = \cos B$, $GE = \cos A$, $GC = \sin A$, daher mit Hülfe des Vierecks $FEGH$

$$GH = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin C};$$

aus Dreieck CGH, da $\measuredangle GCH = 90^0 - \beta$, folgt $\cos\beta = \frac{GH}{GC}$

oder $$\cos\beta = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Genau dieselbe Formel erhält man aus Aufgabe 63, Gleichung 1, wenn man den Cosinussatz der Ecke auf die Polarecke anwendet.

Die Zeichnung verfährt genau analog. Wir gewinnen EF und EG aus den rechtwinkligen Dreiecken CFE und CGE; alsdann $\measuredangle DCA$ aus HG (durch das Viereck $HGEF$) und GC.

* Der Lernende unterlasse es nicht, sich Fig. 84 in Holz oder Papier körperlich herzustellen.

Wir haben in der Zeichnung A und B als spitze Winkel vorausgesetzt. Trifft dies nicht zu, so bedienen wir uns der Nebenecke oder der Gegenecke.

Einschränkung. Durch die obige Bemerkung bezüglich der Polarecke haben wir unsere Aufgabe auf 63 zurückgeführt. Die dort gegebenen Einschränkungen:

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < 360^0,$$
$$\alpha + \beta > \gamma, \text{ u. s. w.}$$

verwandeln sich hier in:

$$0 < 540^0 - A - B - C < 360^0,$$

oder
$$180^0 < A + B + C < 540^0,$$

und
$$180^0 + C > A + B \text{ u. s. w.}$$

Man kann den Cosinussatz der Ecke auch an Fig. 84 in derselben Form wie früher entwickeln. Setzen wir $DC = 1$, so folgt:

$$DB = \cos\alpha, \quad DA = \cos\beta, \quad AC = \sin\beta,$$

also im Kreisviereck $DAEB$

$$AE = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Nun ist $\cos A = \frac{AE}{AC}$, also

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma}.$$

66.

Eine dreiseitige Ecke zu bestimmen aus zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel. Gegeben α, β, A.

Vorbereitung. Setzen wir in Fig. 84 wieder $DC = 1$, so wird $DB = \cos\alpha$, $BC = \sin\alpha$, $DA = \cos\beta$, $AC = \sin\beta$. Diese vier Strecken sind also bekannt. Weiter wird auch $CE = \sin\beta \sin A$, $AE = \sin\beta \cos A$, und nun ist auch B bekannt, da $\sin B = \frac{CE}{BC} = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin\alpha}$ (Sinussatz der Ecke). Mithin ist jetzt $BE = BC \cdot \cos B = \sin\alpha \cos B$ bekannt. Nun verbinden wir E mit D und setzen $\sphericalangle EDA = \delta$, $EDB = \varepsilon$. Dann erhalten wir $tg\,\delta = tg\,\beta \cos A$, $tg\,\varepsilon = tg\,\alpha \cos B$, $\delta + \varepsilon = \gamma$, und die Aufgabe ist auf eine frühere zurückgeführt. Wir finden also die

Lösung: $\sin B = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin\alpha}$, $tg\,\delta = tg\,\beta \cos A$, $tg\,\varepsilon = tg\,\alpha \cos B$, $\delta + \varepsilon = \gamma$. Die Zeichnung folgt genau der Rechnung.

Einschränkung. Da $\sin B < 1$, so mufs sein

$$\sin\beta \sin A < \sin\alpha.$$

Der Punkt E kann aufserhalb des Winkels ADB fallen. Auf die hier zu untersuchenden Fälle gehen wir nicht näher ein.

Ist die Aufgabe gestellt: Eine dreiseitige Ecke zu bestimmen, wenn eine Seite, ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind (α, A, B), so verfahren wir genau wie vorhin.

67.

In einer Wand befindet sich ein dreieckiges Fenster. Welchen Teil des Himmelsgewölbes kann man durch dasselbe erblicken?

Vorbereitung. Die Gröfse des Fensters ist in jeder Hinsicht bekannt. Ferner ist bekannt der Ort des Auges. Nennen wir nun den Augenpunkt D, die drei Fensterecken A, B, C, so entsteht eine Pyramide $DABC$, deren sechs Kanten gefunden werden können. Im Augenpunkte selbst entsteht eine dreiseitige Ecke, deren Seiten $\measuredangle ADC$, BDA, CDB bestimmbar sind, also auch deren Winkel. Nun erblickt das Auge am Himmelsgewölbe ein sphärisches Dreieck mit den Seiten und Winkeln der in D entstandenen dreiseitigen Ecke. Da es sich nun darum handelt, denjenigen Teil auszumitteln, den das sphärische Dreieck im Verhältnisse zur ganzen (oder halben) Himmelskugel ausmacht, so beschreiben wir um D mit einem willkürlichen Radius, etwa der Einheit, eine Kugel. Auf dieser Kugel bestimmt unsere dreiseitige Ecke ein sphärisches Dreieck, und der Inhalt dieses Dreiecks ist derselbe Teil der ganzen Kugel, welcher erhalten wird, wenn wir den durch das Fenster erblickten Raum mit der ganzen Himmelskugel vergleichen.

Lösung. Ist der Radius einer Kugel r, so beträgt ihre Oberfläche $4r^2\pi$. Ein sphärisches Zweieck mit dem Flächenwinkel A hat also die Oberfläche $\frac{4r^2\pi}{360} \cdot A$. Die Ebene DCB schneidet die Kugel in einem Kreise, den DC über D verlängert in C' und DB entsprechend in B' trifft. Ist nun der Inhalt des Dreiecks ABC durch I bezeichnet, so ist derjenige des Dreiecks $C'AB$ (aus der Nebenecke hervorgehend) $\frac{4r^2\pi}{360} \cdot C - I$, der des Dreiecks $B'AC$ (aus der andern Nebenecke) $\frac{4r^2\pi}{360} \cdot B - I$. Das die Gegenecke

überspannende Dreieck $B'AC'$ ergänzt sich mit dem die Scheitelecke überspannenden $B'C'A'$, dessen Inhalt I beträgt, zu $\frac{4r^2\pi}{360} \cdot A$. Die genannten vier Dreiecke bilden aber die Oberfläche der Halbkugel, und so ist:

$$I + \frac{4r^2\pi}{360}(C + B + A) - 3I = 2r^2\pi,$$

$$I = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Mithin erhalten wir

$$\frac{2r^2\pi}{I} = \frac{360}{A + B + C - 180}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Bestimmt man den Inhalt eines sphärischen Vierecks, Fünfecks u. s. w., so findet man als Inhalt des m-Ecks

$$I_m = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_m - 180\,(m-2)}{360} \cdot 2\pi \,. \quad . \quad (3)$$

Im Innern eines überall geschlossenen Körpers, der keine einspringenden Ecken enthalte, wählen wir einen Punkt und verbinden ihn mit allen Ecken. Unser von lauter ebenen Flächen begrenzter Körper heiſst ein Vielflächner (Polyeder). Er möge e Ecken, k Kanten und s Seitenflächen enthalten. Nun wählen wir irgendwo im Raume einen zweiten Punkt und beschreiben um ihn mit dem Radius 1 eine Kugel. Wir ziehen die sämtlichen e Radien, welche den Verbindungslinien des im Innern des Körpers gewählten Punktes mit den Ecken parallel gehen. Dann überzieht sich die Oberfläche der Kugel mit einem Netzwerk mit e Kreuzungspunkten, k Fäden und s von den Fäden begrenzten Maschen. Der Inhalt jeder Masche ist als m-Eck

$$I_m = \frac{2\pi}{360}[A_1 + A_2 + \cdots + A_m - (m-2)\,180].$$

Bilden wir die Summe aller Maschen, so erhalten wir als Summe aller Winkel $e \cdot 360^0$, nämlich an jedem Kreuzungspunkte 360^0. Die Summe der m beträgt $2k$, denn jeder Faden wird als Grenze zweier Maschen doppelt gezählt. Endlich erhalten wir $2 \cdot 180^0$ so oft als Maschen da sind, also $s$mal.

Daher ist

$$\frac{2\pi}{360}(360e - 360k + 360s) = 4\pi,$$

$$e + s - k = 2.$$

Dies ist der Eulersche Lehrsatz vom Polyeder.

68.

Welchen Teil des Himmelsgewölbes bedeckt die Sonnenscheibe (der Vollmond, irgend ein Planet)?

Vorbereitung. Unsere Aufgabe ist gelöst, wenn wir folgende erledigt haben: Welchen Teil des Himmelsgewölbes erblickt man durch eine kegelförmige Röhre? — Die Höhe des Kegels sei h, der Grundkreisradius ϱ, die Seite des Kegels sei s, so dafs $s^2 = h^2 + \varrho^2$ ist. Dann beschreiben wir um den Augenpunkt, die Spitze des Kegels, mit s als Radius eine Kugel und bestimmen denjenigen Teil ihrer Oberfläche, welcher die Öffnung des Kegels überspannt. Das Verhältnis dieses Teils zur Oberfläche der Halbkugel ist zu bestimmen.

Lösung. Der fragliche Teil ist eine Kugelkappe mit der Höhe $s - h$, während der Radius der Kugel s ist. Daher ist die Oberfläche der Kugelkappe, welche hier in Betracht kommt,

$$K = 2 s\pi (s - h),$$

also

$$n = \frac{2 s^2 \pi}{K} = \frac{s}{s - h}. \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

Die Zahl n ist die gesuchte; man erblickt durch den Kegel den n^{ten} Teil des Himmelsgewölbes. Ist nun die scheinbare Gröfse des Himmelskörpers in unserer Aufgabe bekannt, so versteht man darunter den Sehwinkel, unter welchem der Durchmesser des Himmelskörpers erscheint. Nennen wir die scheinbare Gröfse α,

so ist $$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s};\ h = s \cdot cos\frac{\alpha}{2},$$

also nach (1)

$$n = \frac{1}{1 - cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 sin^2\frac{\alpha}{4}}. \quad \cdots \cdots \quad (2)$$

Ist α klein, so kann man $sin\frac{\alpha}{4}$ durch $arc\frac{\alpha}{4}$ ersetzen.

Anmerkung. Man denke sich eine Kugel in einen Cylinder gerollt, der mit der Kugel dieselbe Weite besitzt, der also die Kugel berührt. Wenn man jetzt zwei ebene Schnitte senkrecht zur Axe des Cylinders durch Cylinder und Kugel führt, so ist das zwischen den Schnitten enthaltene Oberflächenstück der Kugel, die Kugelzone, genau gleich dem zwischen den Schnitten enthaltenen Stück des Cylindermantels. Satz des Archimedes über Kugel und Cylinder.

69.

Man bestimme den Inhalt einer dreiseitigen Pyramide.

Vorbereitung. Man kann jedes ebene Flächenstück durch Abtragung der Maſseinheit bestimmen. Nehmen wir als Maſseinheit ein Quadrat mit hinreichend kleiner Seite, so kann man den Fehler, welcher bei dieser Methode im allgemeinen begangen wird, unter jede vorgeschriebene noch so kleine Grenze herabdrücken. Steht über der Fläche g nun ein gerades Prisma mit der Höhe h, so können wir unsere Schluſsweise sofort in die körperliche Geometrie ausdehnen. Als Maſs nehmen wir einen Würfel mit hinreichend kleiner Seite, bedecken die Grundfläche mit g solchen Würfeln und legen h solcher Schichten übereinander. Dann wird also der Inhalt des geraden Prismas bestimmt zu gh Maſseinheiten. — Um nun den Inhalt der Pyramide zu bestimmen, deren Grundfläche g, deren Höhe h ist, führen wir n parallele Schnitte zur Grundfläche in gleichem Abstande durch die Pyramide. Die Schnittflächen sind ähnliche Dreiecke und der Inhalt desjenigen von ihnen, welches von der Spitze den Abstand $\frac{mh}{n}$ hat, welches also beim m^{ten} Schnitt erhalten wird, ist

$$\frac{m^2 g}{n^2}.$$

Wollen wir nun den zwischen dem m^{ten} und $(m+1)^{ten}$ Schnitte enthaltenen Teil der Pyramide erhalten, so können wir ihn als gerades Prisma ansehen mit der Höhe $\frac{h}{n}$ und

1) dem m^{ten} Schnitt als Grundfläche oder
2) dem $(m+1)^{ten}$ Schnitt als Grundfläche.

Nach der ersten Annahme erhalten wir ein zu kleines, nach der zweiten ein zu groſses Endergebnis.

Nach 1) wird
$$\frac{h}{n} \cdot \frac{m^2 g}{n^2}$$
der Inhalt des fraglichen Teils, also der Inhalt der Pyramide

$$\triangle_1 = \frac{hg}{n^3}\,[0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Nach 2) wird

$$\triangle_2 = \frac{hg}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$

Nun ist aber

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m\,(m+1)\,(2m+1)}{6}. \quad (1)$$

Man beweist diese Formal am einfachsten durch vollständige Induktion. Angenommen, die Formel sei für $m = 1, 2, 3$ u. s. w. *richtig*, d. h. für alle Zahlen $< m$ und für m selbst. Wir behaupten dann, daſs sie auch noch für eine weitere Zahl, für $m + 1$ richtig bleibt. Dies wäre bewiesen, wenn wäre

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + m^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Dies ist aber richtig. Denn durch Subtraktion ergiebt sich:

$$(m+1)^2 = \frac{m+1}{6}(2m^2 + 7m + 6 - 2m^2 - m).$$

Durch Probieren überzeugt man sich, daſs Formel (1) richtig ist für $m = 1, 2, 3$. Nun gilt sie dem oben Bewiesenen zufolge auch für ein folgendes m, also für $m = 1, 2, 3, 4$. Nunmehr gilt sie für ein weiteres m, also für $m = 1, 2, 3, 4, 5$. — Hieraus folgt, daſs (1) allgemein richtig ist. Es wird also

$$\triangle_1 = \frac{hg}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$
$$\triangle_2 = \frac{hg}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Nehmen wir nun n als sehr groſse Zahl, so rücken $\triangle_1$ und $\triangle_2$ immer näher zusammen, und für $n = \infty$ folgt

$$\triangle = \frac{gh}{3}.$$

Sind nun die sechs Kanten unserer Pyramide gegeben, so müssen wir suchen, in geschickter Weise Höhe und Grundfläche auszudrücken.

Erste Lösung. Nach Fig. 76 ist $DF = DE \cdot \sin DEF$, $DE = DA \cdot \sin DAC$, also

$$DF = f \sin(fb) \sin(b).$$

Die Grundfläche ist $\frac{1}{2} bc \sin(bc)$, daher

$$\triangle = \tfrac{1}{6} bcf \sin(bc) \sin(fb) \sin(b). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man berechnet also durch ebene Trigonometrie die drei Seiten (bc), (fb), (cf) der Ecke A, dann durch den Cosinussatz der Ecke den Winkel (b). Die Formel ist einfach, aber wenig symmetrisch. Sie kann für jede Ecke drei verschiedene Formen, also im ganzen zwölf verschiedene Formen annehmen.

Zweite Lösung. Wir setzen der Kürze wegen:

$$\sphericalangle (bc) = \alpha,\ (fb) = \beta,\ (fc) = \gamma,\ (b) = C.$$

Dann ist: $$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta},$$

$$36\triangle^2 = b^2c^2f^2 [\sin^2\alpha \sin^2\beta - (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)^2].$$

Diesen Ausdruck können wir nun weiter behandeln, indem wir entweder ausrechnen oder in Faktoren zerlegen. Die erste Methode ergiebt:

$$36\,\triangle^2 = b^2c^2f^2\,[1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma]. \qquad (3)$$

Die zweite Methode ergiebt:

$$36\,\triangle^2 = b^2c^2f^2\,[\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)]\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma],$$

oder wenn
$$\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma,$$

$$36\,\triangle^2 = 4\,b^2c^2f^2 \cdot \sin\sigma \cdot \sin(\sigma-\alpha)\cdot\sin(\sigma-\beta)\cdot\sin(\sigma-\gamma),$$
$$\triangle = \tfrac{1}{3}\,bcf\cdot\sqrt{\sin\sigma\cdot\sin(\sigma-\alpha)\cdot\sin(\sigma-\beta)\cdot\sin(\sigma-\gamma)}. \qquad (4)$$

Dritte Lösung. Die in der zweiten Lösung gegebenen Formeln können vier verschiedene Formen für die vier Ecken der Pyramide erhalten. Setzen wir in (3) ein:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta = \frac{f^2+b^2-h^2}{2bf},\quad \cos\gamma = \frac{f^2+c^2-g^2}{2fc},$$

so ergiebt sich:

$$\triangle = \frac{1}{12}\sqrt{[a^2f^2(-a^2-f^2+b^2+g^2+c^2+h^2)+b^2g^2(-b^2-g^2+a^2+f^2+c^2+h^2)+c^2h^2(-c^2-h^2+a^2+f^2+b^2+g^2)-a^2b^2c^2-a^2g^2h^2-b^2h^2f^2-c^2f^2g^2]}. \qquad (5)$$

Dieser Ausdruck ist keineswegs eine symmetrische Funktion der sechs Kanten. Vertauschen wir a mit b, so ändert sich ihr Wert. Dagegen sind die gegenüberliegenden Kanten a, f; b, g; c, h in der Formel deutlich einander zugeordnet, und die ersten 18 Glieder lassen sich leicht dem Gedächtnisse einprägen. In den vier letzten Gliedern erscheinen je drei Seiten, welche die vier Seitendreiecke der Pyramide bilden. Setzt man

$$a = 9,\ b = 10,\ c = 11,\ f = 6,\ g = 7,\ h = 8,$$

so erhält man für möglichst praktische Rechnung

$$\cos\alpha = \frac{7}{11},\ \cos\beta = \frac{3}{5},\ \cos\gamma = \frac{9}{11}$$

und dann nach (3) $\triangle = 48$.

Meines Wissens ist die Aufgabe, ganzzahlige Kanten so einzurichten, dafs der Inhalt des Tetraeders ganzzahlig wird, noch nicht gelöst. Hier haben wir ein Beispiel vor uns, wo sowohl die Kanten als auch der Inhalt ganze Zahlen sind. — Verschwindet der Ausdruck (5), so liegt der Punkt D in der Ebene ABC (Fig. 76). — Der Ausdruck (4) zeigt, wann die Aufgabe unlösbar wird.

70.

Man bestimme für eine durch ihre sechs Kanten gegebene dreiseitige Pyramide die Winkel der Gegenkanten.

Vorbereitung. Zwei Gegenkanten sind windschiefe Gerade. Unter dem Winkel, den zwei windschiefe Linien miteinander bilden, verstehen wir folgendes. Wir ziehen durch einen willkürlichen Punkt der einen Geraden eine Parallele zur andern, dann ist einer der beiden so entstehenden Nebenwinkel der gesuchte. In der That ist es gleichgültig, welcher Punkt der Geraden gewählt wird; es ist auch gleichgültig, ob man von der einen oder der andern der beiden Geraden ausgeht (vgl. Aufgabe 62), und darum ist der so bestimmte Winkel lediglich von der Richtung der windschiefen Geraden abhängig.

Um den Winkel der Kanten AB und DC zu bestimmen, ziehen wir $CE \parallel AB$ und machen $CE = AB$. Dann ist DCE der verlangte Winkel. Derselbe wird gefunden durch Zeichnung des Dreiecks DCE, von welchem $DC = h$, $CE = c$ gegeben sind. DE ergiebt sich durch Zeichnung des Dreiecks ADE aus der Seite $AD = f$, AE gleich der doppelten Mittellinie des Dreiecks ABC, und DF gleich der Mittellinie des Dreiecks DBC.

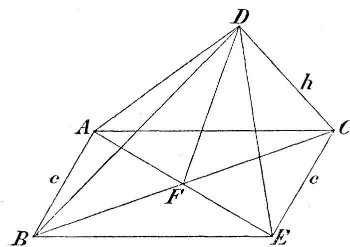


Fig. 85.

Lösung. Man zeichne das Dreieck ABC aus seinen drei Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Man ziehe die Mittellinie AF. Hierauf zeichne man Dreieck BDC aus seinen drei Seiten $BC = a$, $DB = g$, $DC = h$ und ziehe die Mittellinie DF. Jetzt zeichne man Dreieck AFD aus den beiden Mittellinien AF und DF und der Seite $AD = f$. An diesem Dreiecke mache man $FE = FA$, ziehe DE und zeichne das Dreieck DCE, für welches DE soeben gefunden und $DC = h$, $CE = c$ ist. $\sphericalangle DCE$ löst die Aufgabe. — Die Zeichnung der ebenen Figuren ist hier unterlassen.

Lösung durch Rechnung. Sei $AF = p$, $DF = q$, $DE = r$, $\sphericalangle DCE = (hc)$. Dann ist nach dem Satze über die Mittellinien (Aufgabe 6):

$$4p^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2, \quad 4q^2 + a^2 = 2g^2 + 2h^2,$$
$$2f^2 + 2r^2 = 4p^2 + 4q^2 = 2(b^2 + c^2 + g^2 + h^2 - a^2),$$
$$r^2 = b^2 + g^2 + c^2 + h^2 - a^2 - f^2. \quad . \quad . \quad (1)$$

Man beachte das Auftreten dieses Ausdrucks Aufgabe 69, Gl. 5.

Jetzt wird $$\cos(hc) = \frac{a^2 + f^2 - b^2 - g^2}{2hc}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Damit ist die Lösung gegeben. Der Ausdruck hat im Nenner das Kantenpaar h, c. Im Zähler ist anscheinend nicht völlige Symmetrie, Gleichberechtigung für die beiden anderen Kantenpaare a, f und b, g vorhanden. Allein $\sphericalangle(hc)$ kann durch seinen Nebenwinkel $\sphericalangle\, 180^0 - (hc)$ ersetzt werden, und dann erhält man dasselbe Ergebnis wie bei der Ersetzung von a, f durch b, g.

Soll $\sphericalangle(hc) = 90^0$ sein, so mufs $a^2 + f^2 = b^2 + g^2$ werden; soll auch das Kantenpaar (b, g) zu einander senkrecht stehen, so folgt $a^2 + f^2 = h^2 + c^2$. Hieraus ergiebt sich dann $b^2 + g^2 = h^2 + c^2$, oder dafs auch (a, f) zu einander senkrecht sind. **Bilden zwei Paare von Gegenkanten rechte Winkel, so steht auch das dritte Paar zu einander senkrecht.** Für Tetraeder mit senkrechten Gegenkanten hat man:

$$a^2 + f^2 = b^2 + g^2 = c^2 + h^2 = m^2. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

71.

Über einem gegebenen Dreieck als Grundfläche soll ein Tetraeder mit senkrechten Gegenkanten und gegebenem Inhalt errichtet werden.

Vorbereitung. Da für ein Tetraeder mit senkrechten Gegenkanten (nach Aufgabe 70) $a^2 - b^2 = g^2 - f^2$ ist, so treffen die von D und C (Fig. 85) gefällten Senkrechten AB in demselben Fufspunkte (Aufgabe 23). Die von D auf die Ebene ABC herabgelassene Senkrechte trifft also eine Höhe des Dreiecks ABC (Aufgabe 61), und da dasselbe von jeder der drei Höhen gilt, so ist der Höhenpunkt des Dreiecks ABC der Höhenfufspunkt des Tetraeders.

Lösung. Man zeichne das Dreieck ABC aus den drei Seiten, welche laut Aufgabe gegeben sind. Dann bestimme man in diesem Dreiecke den Höhenpunkt O. Ist nun H die Höhe des Tetraeders, so kann man die in O rechtwinkligen Dreiecke OAD, OBD, OCD zeichnen und findet so die übrigen drei Kanten des Tetraeders DB, DC, DA. H ist aber auffindbar. Ist der Inhalt des Tetraeders $\triangle = m \cdot n \cdot p$, so ist, wenn wir im Dreiecke ABC die zu a gehörige Höhe mit h_a bezeichnen:

$$\triangle = mnp = \tfrac{1}{6}\, a\, h_a\, H; \quad H = \frac{6\,mnp}{a h_a}.$$

Nun zeichnen wir $x = \frac{6\,mn}{h_a}$; dann $H = \frac{xp}{a}$.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, daſs bei unserm Tetraeder die Kanten a, f; b, g; c, h aufeinander senkrecht stehen. Da $CE \parallel AB$ (Fig. 85), so ist $CE \perp OC$, also auch $DC \perp CE$, weil in diesem Falle OC die Projektion von DC auf ABC ist.

Anmerkung. Tetraeder mit rechtwinkligen Gegenkanten haben viele ausgezeichnete Eigenschaften, besonders bezüglich ihrer Höhen und ihres Inhalts.

72.

Man bestimme den Abstand zweier Gegenkanten des Tetraeders.

Vorbereitung. Greift man auf einer von zwei windschiefen Geraden einen Punkt A heraus und zieht durch denselben eine Parallele zur andern, so ist die Ebene ABC der Geraden DE parallel. Fällen wir von D auf ABC die Senkrechte DF und ziehen $FG \parallel DE$, so schneidet FG die erste Windschiefe in H und $HJ \parallel FD$ steht auf beiden Windschiefen senkrecht. Denn $FHDJ$ ist ein Rechteck, und weil $FD \perp ABC$, so ist auch $HJ \perp ABC$, also auch $HJ \perp AB$. Diese Linie HJ als Strecke aufgefaſst heiſst Abstand der Windschiefen AB und DE. In der That ist HJ die kürzeste Verbindung zweier Punkte der Windschiefen. Verbindet man z. B. E mit A und fällt von E auf ABC eine Senkrechte, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit AE als Hypotenuse und der Senkrechten, welche gleich HJ ist, als Kathete.

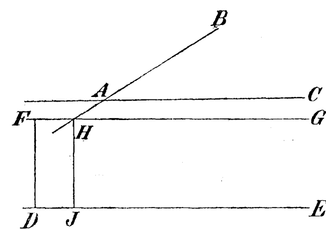


Fig. 86.

Lösung. Wir ziehen, um den Abstand der beiden Gegenkanten c und h zu finden, in Fig. 85 $CE \parallel AB$. Dann löst die von A auf DEC gefällte Höhe des Tetraeders $ADEC$ die Aufgabe. Wir haben also DE und AE nach Aufgabe 70 zu bestimmen und dann mit dem durch seine Kanten bestimmten Tetraeder nach Aufgabe 61 zu verfahren.

Lösung durch Rechnung. Das Tetraeder $ADEC$ hat mit dem ursprünglich gegebenen $ABCD$ gleichen Inhalt. Denn die Dreiecke ABC und AEC sind gleich, und die von D gefällte Höhe ist für beide Tetraeder dieselbe. Nennen wir nun den gesuchten Abstand der Gegenkanten x und I den Inhalt des Dreiecks DEC, so ist

$$\triangle = \tfrac{1}{3} x I.$$

Es ist aber nach Aufgabe 21, wenn $DE = r$,

$$16 I^2 = -r^4 - c^4 - h^4 + 2r^2c^2 + 2r^2h^2 + 2c^2h^2;$$
$$16 I^2 = 4c^2h^2 - (c^2 + h^2 - r^2)^2,$$

also nach Aufgabe 70, Gl. 1:

$$16 I^2 = 4c^2h^2 - (a^2 + f^2 - b^2 - g^2)^2.$$

Folglich erhalten wir

$$x^2 = \frac{144 \triangle^2}{4c^2h^2 - (a^2 + f^2 - b^2 - g^2)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dies ist der Abstand der Gegenkanten h, c. Nach 70, 2 ist

$$4c^2h^2 \sin^2(hc) = 4c^2h^2 - (a^2 + f^2 - b^2 - g^2)^2,$$

also
$$x = \frac{12 \triangle}{2ch \sin(hc)} = \frac{6 \triangle}{ch \sin(hc)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Formel ist leicht geometrisch zu deuten, da der Nenner den Inhalt des Dreiecks DCE zum Hauptbestandteil hat.

Anmerkung. Unsere Vorbereitung setzt uns auch in den Stand, die Fufspunkte der auf c und h senkrechten Linie durch Zeichnung zu bestimmen. Als Satz merke man: Eine gerade Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie irgend einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist. Für das Tetraeder mit rechtwinkligen Gegenkanten ist unsere Aufgabe besonders merkwürdig. Beim regelmäfsigen Tetraeder ist die zu zwei Gegenkanten senkrechte Linie diejenige, welche die Mitten der beiden Gegenkanten verbindet, wie sich aus deckenden Dreiecken sofort ergiebt.

73.

Man bestimme die einem gegebenen Tetraeder umschriebene Kugel.

Vorbereitung. Wenn in einem Tetraeder (Fig. 76) die drei Kanten $DA = DB = DC = f$ sind und man den Fufspunkt F des von D aus auf ABC gefällten Lotes mit den Ecken A, B, C verbindet, so entstehen drei kongruente Dreiecke, $DFA \cong DFB \cong DFC$. Folglich ist $FA = FB = FC$ und F der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises. Nehmen wir nun an, O sei der Mittelpunkt der dem willkürlichen Tetraeder $ABCD$ umschriebenen Kugel, so treffen die von O aus gefällten Senkrechten, weil $OA = OB = OC = OD$ ist, die vier Dreiecke DBC, ACD, ABD, ABC in dem jedesmaligen Mittelpunkte des umschriebenen Kreises.

Lösung durch Zeichnung. Man zeichne das Dreieck ABC und bestimme den Mittelpunkt seines umschriebenen Kreises E. Dann ist $EG \perp AB$, $AG = GB$. Ebenso zeichne man das Dreieck DAB mit dem Mittelpunkte H des umschriebenen Kreises. Dann wird $HG \perp AB$, $AG = GB$. Nun zeichne man den an der Kante AB liegenden Flächenwinkel des Tetraeders (Aufgabe 63) und stelle das rechtwinklige Kreisviereck $HGEO$ aus den vorhin gefundenen Stücken HG, GE und dem Neigungswinkel HGE her, dann ist im rechtwinkligen Dreieck OGB die Hypotenuse OB der gesuchte Kugelradius.

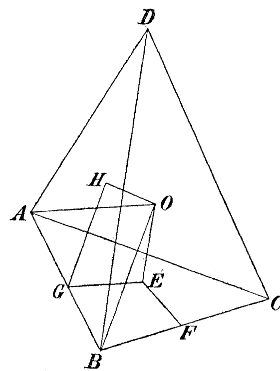


Fig. 87.

Lösung durch Rechnung. Im rechtwinkligen Kreisviereck $BGEF$ ist

$$GE = \frac{a - c\cos\beta}{2\sin\beta}, \quad \text{wenn } \beta = \sphericalangle ABC.$$

Ebenso ergiebt sich

$$HG = \frac{g - c\cos\gamma}{2\sin\gamma}, \quad \text{wenn } \sphericalangle ABD = \gamma.$$

Setzen wir also $\sphericalangle DBC = \alpha$, $\sphericalangle HGE = A$, so wird

$$OG^2 = \frac{HG^2 + GE^2 - 2\,HG \cdot GE \cdot \cos A}{\sin^2 A} \quad \text{(Aufg. 64)},$$

folglich

$$r^2 = OG^2 + \frac{c^2}{4}.$$

Durch Ausführung der Rechnung gelangt man, indem man sowohl vom Cosinussatze als vom Sinussatze der Ecke Gebrauch macht, zu dem Ausdrucke

$$4r^2\sin^2\beta\sin^2\gamma\sin^2 A = g^2\sin^2\beta + a^2\sin^2\gamma + c^2\sin\alpha - 2ag\sin\beta\sin\gamma\cos A$$
$$- 2ac\sin\alpha\sin\gamma\cos B - 2gc\sin\beta\sin\alpha\cos C. \quad . \quad . \quad (1)$$

Da g der Seite β, a der Seite γ, c der Seite α gegenüber liegt, so ist diese Formel symmetrisch gebildet. Die linke Seite (Aufgabe 69, Gleichung 2) hängt mit dem Inhalte zusammen. Da $\sin\beta\sin\gamma\cos A = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma$, so kann man in (1) sofort die *cosinus* durch die Kanten ausdrücken. Die nicht unbeträchtliche Rechnung zerlegt man in sechs Teile, welche den sechs Summanden von (1) entsprechen. Endlich werden diese sechs Teile auf einem Blatt untereinander aufgeschrieben, und zwar m i t ihrem Vorzeichen, damit nicht die Zeichenveränderung zur Fehlerquelle werde.

Man findet schliefslich:

$$24\,r\triangle = \sqrt{(af+bg+ch)(-af+bg+ch)(af-bg+ch)(af+bg-ch)}. \tag{2}$$

Rechts steht unter dem Wurzelzeichen eine Gröfse achter Dimension, links eine solche vierter Dimension. Vgl. Aufgabe 52.

Einfachere Ableitungen der Formel (2) übergehen wir.

74.

Einem gegebenen Tetraeder soll eine Kugel eingeschrieben werden.

Vorbereitung. Wenn der Punkt O von den Ebenen ABC und DAB gleichen Abstand hat, $OH = OE$, und man macht $OG \perp AB$, so ist $GH \perp AB$, $GE \perp AB$ und Dreieck $OGE \cong OGH$, also halbiert OG den Neigungswinkel HGE und Ebene OAB den Flächenwinkel an der Kante AB. Soll also O von den vier Seitenebenen des Tetraeders gleichen Abstand haben, so müssen wir denjenigen Punkt bestimmen, welcher den drei Halbierungsebenen der Flächenwinkel an den Kanten AB, BC, AC gemeinsam ist. Durch diesen Punkt laufen dann auch die Halbierungsebenen der Flächenwinkel an den Kanten DA, DB, DC, wie eine Umkehrung obiger Schlufsweise zeigt. Zum Verständnisse des Vorstehenden genügt Fig. 87, obschon sie für diese Annahmen nicht genau richtig ist.

Lösung. Man zeichne mit willkürlichem CE das bei E rechtwinklige Dreieck CEF und ebenso CEG. Indem man auf CB und CA im Dreiecke BCA die so gewonnenen Strecken CF und CG abträgt, erhält man FG und kann so Dreieck EFG zeichnen. Halbiert man den Winkel FEG, so erhält man auf FG den Punkt H und somit in der Ebene DCH einen geometrischen Ort für O. Wir haben hier eine Methode kennen gelernt, den Durchschnitt der Halbierungsebene eines Flächenwinkels (an DC) mit einer gegebenen Ebene (ABC) aufzufinden. Wenn wir dieses Verfahren auf die Ebene DHC anwenden und aufsuchen, in welchen Geraden sie von den Halbierungsebenen der Flächenwinkel an DA und AC geschnitten wird, so erhalten wir O.

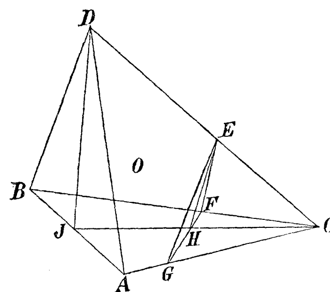


Fig. 88.

Lösung durch Rechnung. Verbindet man O mit den Ecken, so zerfällt die Pyramide inhaltlich in vier Tetraeder. Setzen wir

$$DBA = I_3\,,\quad DAC = I_2\,,\quad DBC = I_1,\quad ABC = I_4,$$

so wird $$\triangle = \tfrac{1}{3}\varrho(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

oder $$\varrho = \frac{3\triangle}{S}, \qquad \ldots\ldots \qquad (1)$$

wenn S die Oberfläche des Tetraeders bezeichnet.

75.

Von einem Tetraeder sind gegeben die drei in einer Ecke zusammenstofsenden Kanten f, g, h und die drei von diesen Kanten gebildeten Winkel $(fg) = \gamma$, $(fh) = \beta$, $(gh) = \alpha$. Man bestimme den Inhalt des Gegendreiecks durch Rechnung.

Da man hat:

$$a^2 = g^2 + h^2 - 2gh\cos\alpha\,;\quad b^2 = f^2 + h^2 - 2fh\cos\beta\,;$$
$$c^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos\gamma,$$

so liegt der Fall der Aufgabe 21 vor, in welchem nicht die Seiten, sondern die Quadrate der Seiten direkt gegeben sind. Die Ausführung der Rechnung zeigt sechs Teile, $-a^4$, $-b^4$ u. s. w. Jeder derselben zerfällt wieder in drei Teile, je nachdem die Glieder nicht mit den *cosinus* multipliziert sind oder einen oder endlich zwei *cosinus* als Faktoren aufweisen. Man findet endlich:

$$I_4^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - 2I_1I_2\cos C - 2I_1I_3\cos B - 2I_2I_3\cos A. \quad (1)$$

Ist das Tetraeder rechtwinklig, d. h. ist $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ und somit $A = B = C = 90^0$, so folgt

$$I_4^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2. \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

Ist das Tetraeder regelmäfsig, also $A = B = C$, $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$,

so folgt $$\cos A = \tfrac{1}{3}.$$

Beide Einzelfälle kann man leicht geometrisch behandeln.

76.

Man zeichne ein rechtwinkliges Tetraeder, wenn die drei Kanten a, b, c gegeben sind.

Vorbereitung. Der geometrische Ort des Punktes D ist zunächst ein Halbkreis mit dem Durchmesser AC. Läfst man den Halbkreis um den Durchmesser AC sich drehen, so entsteht eine

Kugel, deren Mittelpunkt und Radius gegeben sind. Dieselben Schlüsse, auf AB und BC angewandt, zeigen, dafs D als Schnittpunkt von drei gegebenen Kugeln aufzufassen ist. Zwei Kugeln schneiden sich in einem Kreise, dessen Ebene zur Centrale der Kugeln senkrecht steht. Legt man durch die Mittelpunkte beider Kugeln eine Ebene, so trifft sie die Ebene des Schnittkreises in der Chordale der durch sie selbst bestimmten Hauptkreise beider Kugeln. Man findet also (Aufgabe 61) den Fufspunkt der von D auf ABC gefällten Senkrechten, wenn man das Potenzcentrum der drei Kreise bestimmt, welche über den Seiten AB, AC, BC als Durchmesser beschrieben sind. Dieses Potenzcentrum ist nun nichts anderes als der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, da z. B. der über AB stehende Halbkreis BC im Fufspunkte der von A gefällten Höhe trifft. — Zu demselben Ergebnis gelangt man weit einfacher, wenn man von D auf BC die Senkrechte DE fällt und nun erwägt, dafs $AE \perp BC$ und geometrischer Ort für den Fufspunkt der von D auf die Ebene ABC zu fällenden Senkrechten ist. (Vgl. Aufg. 71.) Unser Tetraeder gehört zu denjenigen mit senkrechten Gegenkanten.

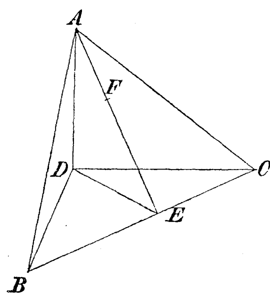


Fig. 89.

Lösung. Man suche im gegebenen Dreiecke ABC den Höhenpunkt und beschreibe über jeder Höhe als Durchmesser einen Halbkreis, z. B. über der Höhe AE. Die im Höhenpunkte F zu AE errichtete Senkrechte trifft den Halbkreis im Punkte D, und es ist $AD = f$.

Beweis. Durch unsere Zeichnung ist $AE \perp BC$, $DA \perp DE$, und wenn wir annehmen, dafs $DF \perp ABC$, so ist nur zu zeigen, dafs die drei Kanten DA, DB, DC aufeinander senkrecht stehen. EF ist Projektion von DE, also $DE \perp BC$, weil $FE \perp BC$. Somit ist $AD \perp DBC$ (Aufgabe 61) und darum $\sphericalangle ADB$ und ADC rechte Winkel. Ebenso zeigt man, dafs auch $\sphericalangle BDC = 90^0$.

Lösung durch Rechnung. Aus den Gleichungen:

$$f^2 + g^2 = c^2;\ g^2 + h^2 = a^2;\ h^2 + f^2 = b^2,$$

folgt

$$f^2 + g^2 + h^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

also

$$f^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich die

Einschränkung. Das gegebene Dreieck ABC darf nicht stumpfwinklig sein. (Vgl. Aufgabe 6.) Dies ergiebt sich auch sofort aus unserer gezeichneten Lösung. Denn für ein stumpfwinkliges Dreieck liegt der Höhenpunkt aufserhalb des Dreiecks. Folglich trifft der über der Höhe als Durchmesser beschriebene Kreis die im Höhenpunkte errichtete Senkrechte nicht.

Anmerkung. Soll die Aufgabe gelöst werden: Über einem gegebenen Dreieck als Grundfläche soll ein Tetraeder aufgestellt werden, so dafs die drei Seitenwinkel an der Spitze vorgeschriebene Gröfsen haben, so sind folgende Gleichungen zu lösen:

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma,$$
$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos\alpha,$$
$$b^2 = z^2 + x^2 - 2zx \cos\beta.$$

Man erkennt hierin, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 120^0$, die Aufgabe über den fünften merkwürdigen Punkt des Dreiecks und, wenn $c = \sigma \cdot \sin\gamma$, $a = \sigma \cdot \sin\alpha$, $b = \sigma \cdot \sin\beta$ ist, die Aufgabe des Malfatti.

77.

Ein rechtwinkliges Tetraeder ist gegeben. Man bestimme durch Zeichnung und Rechnung den Abstand eines Punktes P von der vierten Fläche, wenn seine Abstände x, y, z von den drei zu einander senkrechten Ebenen gegeben sind.

OA, OB, OC seien die drei zu einander senkrechten Kanten, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Ebenso gemessen sei

$$QS = x,\ QR = y,\ QP = z.$$

Diese drei Abmessungen bestimmen die Lage des Punktes P eindeutig. Sie werden seine Koordinaten genannt.

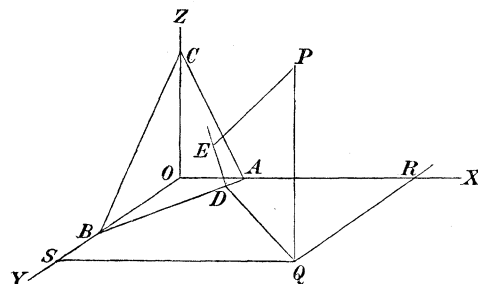


Fig. 90.

Lösung. Man stelle das Rechteck $OSQR$ her aus den Seiten $OR = x$, $OS = y$. Man trage $OA = a$, $OB = b$ ab und ziehe AB. Dann fälle man $QD \perp AB$. Jetzt zeichne man Dreieck ABC und trage den Punkt D auf AB ein. Die zu AB errichtete Senkrechte DE ist ein geometrischer Ort für den Fufspunkt E. Verfährt man ebenso bezüglich vom Rechteck xz

oder yz ausgehend, so findet man einen zweiten geometrischen Ort. — Die Gröfse der Senkrechten PE liefert das rechtwinklige Kreisviereck $PEDQ$.

Beweis. Weil $PQ \perp OSQR$ und $QD \perp AB$, so ist auch $PD \perp AB$ als projizierte Schiefe. Da nun $ED \perp AB$, so ist ED geometrischer Ort für den Fufspunkt der von P auf ABC zu fällenden Senkrechten. Dasselbe gilt für jeden der beiden anderen geometrischen Örter.

Lösung durch Rechnung. Setzt man $PE = p$, nennt I den Inhalt des Dreiecks ABC, dann ist der Inhalt der Pyramide $PBCA$

$$\tfrac{1}{3} p\, I.$$

Andrerseits ist derselbe gleich der Summe der Pyramiden $POBC$, $POBA$, $POAB$ vermindert um $OBAC$. Die Pyramide $POBA$ hat zur Grundfläche OBA, zur Höhe PQ, also den Inhalt $\frac{1}{6} abz$. So ergiebt sich

$$2pI = abz + bcx + cay - abc,$$

und da $$2I = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \text{ (Aufgabe 75)},$$

so folgt $$p = \frac{bcx + cay + abz - abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Soll $p = 0$ werden, so mufs P der Ebene ABC angehören. Dann sind aber x, y, z nicht mehr willkürlich, sondern es mufs sein:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs $p = 0$, also P ein Punkt der Ebene ABC ist. Sie ist die Gleichung der Ebene.

78.

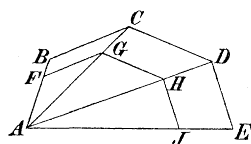
Von einer n-seitigen Pyramide ist Grundfläche und Höhe gegeben. Man bestimme einen Parallelschnitt, welcher den m^{ten} Teil der Grundfläche bildet, und seinen Abstand von der Spitze.

Vorbereitung. Nach einem bereits in Aufgabe 69 angewandten Lehrsatze sind die Parallelschnitte ähnliche Figuren und verhalten sich wie die Quadrate der Abstände von der Spitze. Nennen wir also die gegebene Grundfläche g, die gegebene Höhe h, den gesuchten Parallelschnitt s, seinen Abstand von der Spitze x, so ist:

$$s : g = x^2 : h^2 = 1 : m,$$

$$x^2 = h \frac{h}{m}.$$

Da s und g ähnliche Figuren sind, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten, also die Seiten selbst wie $x : h$.



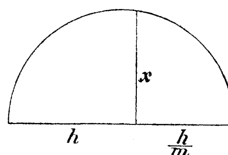


Fig. 91.

Lösung. Man zeichne vorschriftsmäſsig x mit Hülfe des Satzes vom rechtwinkligen Dreieck, teile eine Seite der Grundfläche $ABCDE$, so daſs

$$AF : AB = x : h$$

wird, ziehe die Diagonalen von A aus und durch F eine Parallele zu BC u. s. w. Der Parallelschnitt ist $AFGHJ$.

79.

Welcher Cylinder hat bei gegebener Oberfläche den gröſsten körperlichen Inhalt?

Lösung. Angenommen, die Höhe des fraglichen Cylinders sei x, sein Grundkreisradius y. Dann haben wir für seine Oberfläche S und für seinen Körperinhalt V die Gleichungen:

$$S = 2yx\pi + 2y^2\pi,$$
$$V = y^2x\pi.$$

Hieraus ergiebt sich alsbald:

$$2V = yS - 2y^3\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn y sich ändert, so ändert sich x und V. Durch y ist also alles genau bestimmt. Da nun für unsern Wert y der Körperinhalt nach unserer Annahme am gröſsten ist, so muſs der Körperinhalt des neu entstehenden Cylinders abnehmen, wenn y sich ändert. Es muſs Verminderung des Körperinhaltes eintreten, mag y um die positive Gröſse α zunehmen oder um dieselbe Gröſse abnehmen. Es muſs also gleichzeitig sein:

$$yS - 2y^3\pi > (y + \alpha)S - 2(y + \alpha)^3\pi,$$
$$yS - 2y^3\pi > (y - \alpha)S - 2(y - \alpha)^3\pi.$$

Diese beiden Ungleichungen bestehen, es mag α so klein genommen werden, als man nur will. Ja, es ist sogar im allgemeinen erforderlich anzunehmen, daſs α eine gewisse Gröſse nicht übersteige. Hier ist es nicht nötig, diesen Umstand besonders zu betonen.

Aus den obigen Ungleichungen folgt:

$$0 > \quad \alpha(S - 6y^2\pi) - 6y\alpha^2\pi - 2\alpha^3\pi,$$
$$0 > -\alpha(S - 6y^2\pi) - 6y\alpha^2\pi + 2\alpha^3\pi.$$

Oder, wenn wir durch die positive Gröfse α dividieren:

$$0 > \quad S - 6y^2\pi - 6y\alpha\pi - 2\alpha^2\pi,$$
$$0 > -(S - 6y^2\pi) - 6y\alpha\pi + 2\alpha^2\pi.$$

Jetzt behaupten wir, dafs der Ausdruck $S - 6y^2\pi$ verschwindet. Wenn er nicht Null wäre, so könnten wir α so klein annehmen, dafs die beiden folgenden Glieder im Vergleiche zu seinem Werte gänzlich bedeutungslos würden. Dann wäre zugleich:

$$0 > S - 6y^2\pi \text{ und } 0 > -S + 6y^2\pi, \text{ d. h.}$$
$$0 < S - 6y^2\pi.$$

Hiermit ist ein offenbarer Widerspruch dargethan. Also mufs sein

$$S = 6y^2\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dann folgt aus dem ersten Ausdrucke für S

$$x = 2y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung bestimmt die Form des Cylinders, löst also die Aufgabe. Es ist der Cylinder mit quadratischem Axenschnitt oder der gleichseitige Cylinder derjenige, welcher bei gegebener Oberfläche den gröfsten Inhalt hat.

80.

Welcher Kegel hat bei gegebener Oberfläche den gröfsten körperlichen Inhalt?

Lösung. Bezeichnen wir wieder die Oberfläche durch S, den körperlichen Inhalt durch V, so ist:

$$S = rs\pi + r^2\pi; \; V = \tfrac{1}{3}r^2h\pi,$$

wo r den Grundkreisradius, h die Höhe, s die Seite des Kegels bezeichnet. Setzen wir $r = y$, $h = x$, so ist $s^2 = x^2 + y^2$ und

$$9V^2 = y^4\pi^2x^2; \; S^2 - 2Sy^2\pi + y^4\pi^2 = y^2\pi^2(x^2 + y^2),$$
$$x^2 = \frac{S^2 - 2Sy^2\pi}{y^2\pi^2};$$
$$9V^2 = y^2S^2 - 2Sy^4\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Lösen wir diese quadratische Gleichung nach y^2 auf, so erhalten wir

$$y^2 = \frac{S}{4\pi} \pm \sqrt{-\frac{9V^2}{2S\pi} + \frac{S^2}{16\pi^2}}. \quad . \quad . \quad (2)$$

Sind also V und S gegeben, so kann man den betreffenden Kegel bestimmen. Man findet im allgemeinen zwei Auflösungen. Aber man erkennt, dafs immer sein mufs

$$V^2 \leqq \frac{S^3}{72\pi},$$

wenn die Gleichung (2) zu einem reellen y, also zu einem reellen Kegel führen soll. Der gröfste Wert, den V annehmen kann, wird also gegeben durch

$$V^2 = \frac{S^3}{72\pi}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Für diesen Wert liefert (2)

$$y^2 = \frac{S}{4\pi};$$

daher aus der (1) vorhergehenden Gleichung

$$x^2 = \frac{2S}{\pi}.$$

Man hat also $x^2 = 8y^2$, mithin $s^2 = 9y^2$.

Der Kegel mit gröfstem Inhalt bei gegebener Oberfläche ist also derjenige, dessen Seite dreimal so grofs ist als der Grundkreisradius.

Auch nach der zur vorigen Aufgabe gegebenen Methode läfst sich diese Aufgabe lösen. Man findet die Ungleichungen:

$$y^2S^2 - 2Sy^4\pi > (y+\alpha)^2S^2 - 2S\pi\,(y+\alpha)^4,$$
$$y^2S^2 - 2Sy^4\pi > (y-\alpha)^2S^2 - 2S\pi\,(y-\alpha)^4.$$

Hieraus zieht man wie dort den Schlufs:

$$2yS^2 - 8S\pi y^3 = 0.$$

Daher $y = 0$, und das ist sinnlos; oder $y^2 = \dfrac{S}{4\pi}$, wie oben.

81.

Welches ist der gröfste einer Kugel eingeschriebene Kegel?

Lösung. Wir bezeichnen den gegebenen Kugelradius mit r, den Grundkreisradius des Kegels ϱ mit y, seine Höhe h mit x. Dann soll

$$V = \tfrac{1}{3}y^2x\pi$$

möglichst grofs werden. Nach dem Satze vom rechtwinkligen Dreieck ist

$$y^2 = x(2r - x),$$

also

$$3V = x^2(2r - x)\pi.$$

Angenommen, V habe für $h = x$ den gröfsten Wert. Wird x vergröfsert, so verkleinert sich der Grundkreisradius; aber der Inhalt V wird nach unserer Annahme kleiner. Wird x verkleinert,

so vergröſsert sich der Grundkreisradius; aber der Inhalt V wird wiederum kleiner. Dies sagen die beiden Ungleichungen aus:

$$2rx^2 - x^3 > 2r(x+\alpha)^2 - (x+\alpha)^3,$$
$$2rx^2 - x^3 > 2r(x-\alpha)^2 - (x-\alpha)^3.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$0 > \alpha(4rx - 3x^2) + \alpha^2(2r - 3x) - \alpha^3,$$
$$0 > -\alpha(4rx - 3x^2) + \alpha^2(2r - 3x) + \alpha^3.$$

Dividiert man durch die positive Gröſse α und bemerkt, daſs das so entstehende Ergebnis richtig sein muſs, wenn α auch eine so kleine Gröſse ist, daſs etwa $\alpha(2r - 3x) - \alpha^2 < 10^{-25}$, so ergiebt sich der Widerspruch:

$$4rx - 3x^2 < 0,$$
$$4rx - 3x^2 > 0.$$

Dieser Widerspruch fällt weg, wenn $4rx - 3x^2 = 0$ ist; denn alsdann sagen unsere Ungleichungen:

$$0 > \alpha^2(2r - 3x) - \alpha^3,$$
$$0 > \alpha^2(2r - 3x) + \alpha^3.$$

Es folgt aus $4rx - 3x^2 = 0$, daſs $x = 0$ oder $x = \frac{4r}{3}$ ist. Im erstern Falle erhalten wir eine sinnlose Antwort, im zweiten erhalten wir den gesuchten Kegel. Unsere Ungleichungen sagen:

$$0 > -2r\alpha^2 - \alpha^3,$$
$$0 > -2r\alpha^2 + \alpha^3;$$

und beide sind für alle der Kugel eingeschriebenen Kegel, wo also $0 < \alpha < 2r$ ist, richtig.

Man erhält also den Kegel gröſsten Inhalts, welcher einer gegebenen Kugel eingeschrieben werden kann, wenn man die Höhe des Kegels als $\frac{4}{3}$ vom Kugelradius bestimmt.

Anmerkung. Wir haben die Lösung $x = 0$ sinnlos genannt. Wenn man fragt, welcher der kleinste einer Kugel eingeschriebene Kegel sei, so kann man ihr einen Sinn abgewinnen.

82.

Um eine Kugel soll ein Kegel kleinsten Inhalts beschrieben werden.

Lösung. Wir setzen $AD = x$, $BD = y$, $FE = r$. Dann ist, weil $AFE \sim ADB$ ist,

$$(x - r) : r = AB : y$$

oder

$$(x - r)^2 y^2 = r^2(y^2 + x^2).$$

Hieraus folgt $$x^2y^2 - 2xy^2r = r^2x^2$$

oder $$y^2 = \frac{r^2x^2}{x^2 - 2rx}. \quad \cdots \cdots \quad (1)$$

Nun soll ein Minimum sein

$$3V = y^2x\pi = \frac{r^2x^2\pi}{x - 2r}. \quad \cdots \cdots \quad (2)$$

Ordnen wir nach Potenzen von x, so haben wir eine quadratische Gleichung vor uns, nämlich:

$$x^2 - \frac{3V}{r^2\pi}x = -\frac{6V}{r\pi}.$$

Die Auflösung derselben ergiebt:

$$x = \frac{3V}{2r^2\pi} \pm \sqrt{\frac{9V^2}{4r^4\pi^2} - \frac{6V}{r\pi}}.$$

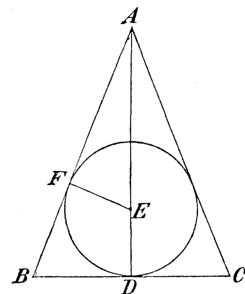


Fig. 92.

Man kann nur dann für x einen reellen Wert, also für die Aufgabe, einen Kegel vorgeschriebenen Inhalts um eine gegebene Kugel zu beschreiben, nur dann eine Lösung finden,

wenn ist: $$V \geqq \frac{8r^3\pi}{3}.$$

Der kleinste Kegel, welcher zulässig ist, wird also den Inhalt haben:

$$V = \frac{8r^3\pi}{3}.$$

Für diesen Wert wird

$$x = \frac{3V}{2r^2\pi} = 4r.$$

Man findet also den kleinsten einer Kugel umschriebenen Kegel, wenn man seine Höhe gleich dem doppelten Durchmesser nimmt. Der Inhalt dieses kleinsten Kegels ist genau doppelt so grofs als der Inhalt der Kugel.

Wir hätten diese Aufgabe auch mit Hülfe der Ungleichheiten lösen können. Wir wollen nur die eine derselben aufschreiben:

$$\frac{x^2}{x - 2r} < \frac{(x+\alpha)^2}{x + \alpha - 2r}.$$

Daraus folgt:

$$0 < \alpha(x^2 - 4rx) + \alpha^2(x - 2r).$$

Es ergiebt sich wieder $x = 4r$ und die für jedes α richtige Ungleichung:

$$0 < 2r\alpha^2.$$

83.

In eine gegebene Kugel soll das gröfste rechtwinklige Parallelepipedon beschrieben werden.

Lösung. Länge, Breite, Höhe des Parallelepipedons bezeichnen wir durch x, y, z; den Inhalt desselben durch V. Dann wird

$$V = xyz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn r der Radius der Kugel, so ist ferner

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zunächst erteilen wir dem Parallelepipedon die bestimmte Höhe $z = h$ und fragen: Wie müssen wir über x und y verfügen, damit xyh ein Maximum werde, wenn $x^2 + y^2 = 4r^2 - h^2$ sein soll? Da h fest angenommen ist, so wird xyh ein Maximum, wenn xy ein Maximum ist. Ist aber $x^2 + y^2$ gegeben, und wird verlangt, dafs xy ein Maximum sei, so haben wir die geometrische Aufgabe vor uns, ein Rechteck anzugeben, welches bei gegebener Diagonale den gröfsten Inhalt hat. Diese Aufgabe löst man am besten planimetrisch. Man kann aber auch algebraisch verfahren. Aus

$$x^2 + y^2 = a^2, \; xy = b$$

leitet man ab

$$(x - y)^2 = a^2 - 2b.$$

Daher mufs sein $a^2 \geqq 2b$. Der gröfste Wert für b ist $\frac{a^2}{2}$, und für diesen Wert folgt $x = y$; also mufs das gesuchte Rechteck ein Quadrat sein.

Wenn also $h = z$ gegeben ist, so mufs $x = y$ sein, damit ein Maximum eintrete. Unter allen Parallelepipeden, welche einer Kugel eingeschrieben sind und die gleiche Höhe h haben, ist dasjenige mit quadratischer Grundfläche am gröfsten.

Es fragt sich nun, welches ist das Maximum maximorum? Oder, wie haben wir z einzurichten, damit x^2z ein Maximum sei, während ist

$$2x^2 + z^2 = 4r^2?$$

Da x, y, z sich in unserer Aufgabe gleichberechtigt verhalten, so dürfen wir schon sicher sein, dafs $x = y = z$, also ein Würfel gefunden wird. Es ist in der That

$$2x^2z = 4r^2z - z^3.$$

Es mufs also sein:

$$4r^2(z + \alpha) - (z + \alpha)^3 < 4r^2z - z^3,$$
$$4r^2(z - \alpha) - (z - \alpha)^3 < 4r^2z - z^3.$$

Man findet $4r^2 - 3z^2$ als Koeffizient von α und darum $z^2 = \frac{4r^2}{3}$ $2x^2 = \frac{8r^2}{3}$, wie wir vermutet haben.

Das gröſste einer Kugel eingeschriebene Parallelepipedon ist also ein Würfel.

84.

Ein Dreieck rotiert um eine in seiner Ebene liegende Axe, welche nicht durch die Dreiecksfläche geht. Man berechne den Inhalt des Rotationskörpers.

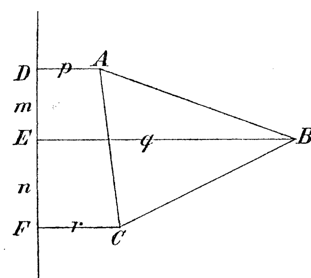


Fig. 93.

Lösung. Der fragliche Inhalt erscheint als Summe der abgestumpften Kegel mit den Halbschnitten $DABE$ und $EBFC$ vermindert um denjenigen, dessen Halbschnitt $DACF$ ist.

Nach den Bezeichnungen der Figur wird also

$$\triangle = \tfrac{1}{3} m\pi (p^2 + pq + q^2) + \tfrac{1}{3} n\pi (q^2 + qr + r^2) - \tfrac{1}{3}(m+n)(p^2 + pr + r^2)$$

oder $\frac{3\triangle}{\pi} = m(q^2 - r^2 + pq - pr) + n(q^2 - p^2 + qr - pr)$.

Nun ist $q^2 - r^2 = (q+r)(q-r)$ und $(q-r)p$ ebenfalls in der ersten Klammer zerlegbar. Ebenso verfährt man in der zweiten und findet

$$\frac{3\triangle}{\pi} = m(q-r)(p+q+r) + n(q-p)(p+q+r).$$

Nun zeigt sich, daſs der Inhalt des Dreiecks ABC gegeben ist als

$$I = \frac{m}{2}(p+q) + \frac{n}{2}(r+q) - \frac{m+n}{2}(p+r),$$

da es als Summe der Paralleltrapeze $DABE$ und $EBCF$ vermindert um $ADFC$ aufgefaſst werden kann. D e r I n h a l t e i n e s P a r a l l e l t r a p e z e s i s t a b e r g l e i c h d e m j e n i g e n e i n e s P a r a l l e l o g r a m m e s, w e l c h e s d i e E n t f e r n u n g d e r p a r a l l e l e n S e i t e n z u r H ö h e u n d d i e h a l b e S u m m e d e r s e l b e n z u r G r u n d l i n i e h a t. Folglich ist

$$2I = m(q-r) + n(q-p),$$

also

$$\triangle = 2\pi \cdot \frac{p+q+r}{3} \cdot I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Den geometrischen Sinn dieses Ausdrucks wollen wir jetzt aufsuchen. Wir lösen die Aufgabe: Die Endpunkte einer Strecke AB

haben von einer Axe in der Ebene der Strecke die Abstände a, b; man bestimme den Abstand c eines Punktes C von der Axe, welcher die Strecke im Verhältnisse $m : n$ teilt.

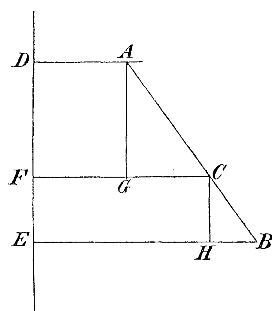


Fig. 94.

$AD = a$, $CF = c$, $BE = b$. Dann ist

$$BH : GC = BC : AC = n : m,$$

oder $$(b - c) : (c - a) = n : m,$$

$$c = \frac{na + mb}{n + m}. \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

Halbieren wir also in Fig. 93 die Seite AB, so hat die Mitte von der Axe den Abstand ($m = n = 1$)

$$\frac{p + q}{2}.$$

Ziehen wir jetzt die Mittellinie von C aus zur Mitte von AB und teilen sie im Verhältnisse $1 : 2$, von der Seitenmitte aus gerechnet, so wird, da $a = \frac{p + q}{2}$, $b = r$, $m = 1$, $n = 2$,

$$c = \frac{p + q + r}{3}.$$

Folglich erhalten wir: Wenn ein Dreieck um eine in seiner Ebene liegende Axe rotiert, welche nicht durch die Dreiecksfläche geht, so ist der Inhalt des Rotationskörpers gleich dem Inhalte des Dreiecks, multipliziert mit dem Wege, den der Schwerpunkt des Dreiecks bei der Umdrehung zurücklegt. Setzt man in diesem Satze an Stelle von „Dreieck“ den Begriff „ebene Figur“, so hat man den berühmten Pappos-Guldinschen Satz. Er lautet also:

$$\triangle = 2\pi s \cdot I, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo I den Inhalt der rotierenden Figur, s den Abstand des Schwerpunktes derselben von der Axe und $\triangle$ den Inhalt (das Volumen) des Rotationskörpers bedeutet.

Wir wollen den Satz allgemein beweisen. Angenommen, er sei richtig für die beiden Figuren I_1 und I_2, welche in einer geraden oder krummen Linie aneinander grenzen, es sei also

$$\triangle_1 = 2\pi s_1 \cdot I_1; \quad \triangle_2 = 2\pi s_2 \cdot I_2.$$

Wir behaupten, der Satz sei auch für die durch die Umdrehung der Gesamtfigur $I_1 + I_2$ entstandenen Körper $\triangle_1 + \triangle_2$ richtig, oder es sei

$$\triangle_1 + \triangle_2 = 2\pi s (I_1 + I_2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo s den Abstand des Schwerpunktes der Gesamtfigur $I_1 + I_2$ von der Axe bedeutet. Diesen Schwerpunkt findet man, wenn

man die Schwerpunkte von I_1 und I_2 verbindet und diese Strecke nach dem Hebelgesetze, also im umgekehrten Verhältnisse von $I_1 : I_2$ teilt. Folglich ist nach (2)

$$s = \frac{s_1 I_1 + s_2 I_2}{I_1 + I_2},$$

mithin (4) als richtig erwiesen. — Nun ist der Guldinsche Satz für jedes Dreieck richtig; also gilt er auch für jedes Viereck, weil es aus zwei Dreiecken zusammengesetzt werden kann; also auch für jedes Fünfeck, weil es aus einem Vierecke und einem Dreiecke zusammengesetzt werden kann u. s. w. Also gilt der Satz (3) allgemein.

Man hätte diesen Beweis in mancher Beziehung vereinfachen können, wenn man von einem Rechtecke ausgegangen wäre, welches um eine der Längsseite des Rechtecks parallele Axe rotiert. Da der Guldinsche Satz auch für die Kugel gilt, wenn man den Halbkreis rotieren läfst, so ist

$$\frac{4 r^3 \pi}{3} = \tfrac{1}{2} r^2 \pi \cdot 2 \pi s,$$

also bestimmt man den Schwerpunkt des Halbkreises $s = \frac{4r}{3\pi}$. Rotiert der Kreis um die Axe, welche vom Mittelpunkte den Abstand a hat, so ist

$$\triangle = r^2 \pi \cdot 2 a \pi = 2 a r^2 \pi^2.$$

85.

Wie grofs ist die Arbeit, welche erfordert wird, einen aufrecht stehenden Cylinder umzuwerfen?

Vorbereitung. Wenn man eine Axe durch den Schwerpunkt eines Körpers steckt, so ist derselbe um diese Axe ohne jede Anstrengung drehbar. Der Körper befindet sich bezüglich dieser Axe im indifferenten Gleichgewicht. Jetzt können wir zur Lösung unserer Aufgabe uns folgende Vorstellung bilden. Wir heben den Cylinder mit der durch den Schwerpunkt gesteckten Axe in unveränderter Stellung so hoch von der stützenden Ebene ab, dafs eine völlige Umdrehung des Cylinders um die Axe ohne irgend welchen Anstofs an der stützenden Ebene gerade ausführbar wird. Um also die Umlegung des Cylinders zu bewerkstelligen, haben wir so viel Arbeit zu leisten, als dazu gehört, sein Gewicht um so viel zu heben, als vorhin sein Schwerpunkt aus der ursprünglichen in die neue Lage gehoben werden mufste.

Lösung. In der ursprünglichen Lage hatte der Abstand des Schwerpunktes von der Grundebene die Gröfse $\frac{1}{2}h$, in der neuen Lage die Gröfse $\sqrt{r^2 + \frac{1}{4}h^2}$. Beträgt also das spezifische Gewicht des Cylinders s, seine Höhe h dm, sein Grundkreisradius r dm, so ist sein Gewicht

$$P = r^2 h \pi s \text{ kg},$$

also die zum Umwerfen erforderliche Arbeit in Kilogrammmetern

$$\frac{1}{20} r^2 h \pi s (\sqrt{4r^2 + h^2} - h).$$

Dieselbe Aufgabe kann man für jeden geometrisch bestimmten Körper stellen, so für einen Kegel, einen Würfel, ein Prisma, ein Tetraeder. Beim Tetraeder u. s. w. ist es keineswegs gleichgültig, um welche Kante die Umlegung erfolgen soll. Wir lösen mit Bezug auf diese Dinge die Aufgabe

86.

Man bestimme die Abstände des Schwerpunktes eines Tetraeders von den Ecken.

Vorbereitung. Verbindet man eine Ecke D des Tetraeders mit dem Schwerpunkte G des Gegendreiecks ABC, so geht DG durch alle Schwerpunkte der Parallelschnitte. Folglich mufs der Schwerpunkt des Tetraeders auf der Linie DG liegen. Nennen wir DG eine Mittellinie des Tetraeders, so gilt derselbe Schlufs für alle vier Mittellinien des Tetraeders. Dieselben müssen sich also in einem Punkte, dem Schwerpunkte des Tetraeders, schneiden.

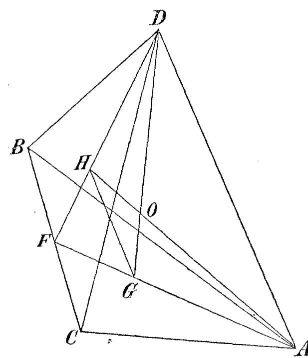


Fig. 95.

Lösung. Wir zeichnen (Fig. 95) das Dreieck AFD aus der gegebenen Kante $AD = f$ und den beiden Mittellinien der Dreiecke ABC und DBC. Hierauf machen wir $GF = \frac{1}{3}AF$, $HF = \frac{1}{3}DF$, so dafs G und H die Schwerpunkte der Dreiecke BCA und BCD sind. Dann lösen DG und AH durch ihren Schnittpunkt O die Aufgabe. Es ist $GH \parallel DA$, also auch $GH = \frac{1}{3}DA$, folglich auch $HO = \frac{1}{3}OA$, $HO = \frac{1}{4}HA$. Zwei Mittellinien eines Tetraeders schneiden sich derartig, dafs das der Ecke zugewandte Stück dreimal so grofs

ist als das dem Gegendreieck zugewandte. Hieraus kann man durch indirekten Beweis leicht ableiten, dafs die vier Mittellinien des Tetraeders sich in einem Punkte schneiden. Vgl. Aufgabe 7.

Lösung durch Rechnung. Nach Aufgabe 10 ist

$$9\,AH^2 = 3f^2 + 6\,AF^2 - 2\,DF^2,$$

ferner $4\,AF^2 = 2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2,$

$$4\,DF^2 = 2g^2 + 2\,h^2 - a^2,$$

folglich $9\,AH^2 = 3f^2 + 3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2 - g^2 - h^2.$ (1)

Die geometrische Bedeutung ist sofort klar, da a, g, h das Gegendreieck bilden und f, b, c zu den Ecken desselben gezogen sind. Bezeichnen wir die vier Mittellinien der Reihe nach durch T_A, T_B, T_C, T_D, so wird:

$$9\,T_A^2 = 3f^2 + 3\,b^2 + 3\,c^2 - a^2 - g^2 - h^2,$$
$$9\,T_B^2 = 3g^2 + 3\,c^2 + 3\,a^2 - b^2 - h^2 - f^2,$$
$$9\,T_C^2 = 3h^2 + 3\,a^2 + 3\,b^2 - c^2 - f^2 - g^2,$$
$$9\,T_D^2 = 3f^2 + 3g^2 + 3\,h^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Hieraus folgt:

$$9\,(T_A^2 + T_B^2 + T_C^2 + T_D^2) = 4\,(a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2).$$

Die Werte $OA = \frac{3}{4}\,T_A$ u. s. w. ergeben sich nun von selbst.

Unsere Aufgabe führt zur Lösung vieler anderen, z. B.:

Gegeben die drei Grundkanten a, b, c und die drei zu den Seitendreiecken gehörenden Mittellinien T_A, T_B, T_C; man zeichne die übrigen drei Kanten und bestimme somit das Tetraeder. — Man zeichne Dreieck BOC, worauf FO sich ergiebt. Dann zeichne man FOA, welches OG, dann DO und endlich $DA = f$ liefert.

Hat ein Punkt K von den Ecken A, B, C, D die Abstände x, y, z, u, welchen Abstand hat er dann vom Schwerpunkte O des Tetraeders $ABCD$? — Man bestimme zunächst KF aus dem Dreiecke KBC, dann KG aus dem Dreiecke KFA, dann KO aus dem Dreiecke KGD.

87.

Um ein Tetraeder *ABCD* ist eine Kugel beschrieben. Man zeichne in der Ebene *ABC* den Schnitt der in *D* an die Kugel gelegten Tangentialebene.

Vorbereitung. Die Ebene BCD schneidet die Kugel in einem Kreise, und zwar in demjenigen Kreise, den man um das Drei-

eck DBC beschreiben kann. Die Ebene BCD schneidet die Tangentialebene in derjenigen Geraden, welche durch D geht und den durch B, C, D gelegten Kreis berührt.

Lösung. Man zeichne das Dreieck ABC und setze ihm nach aufsen die Dreiecke DBC, DAC auf. Um beide Dreiecke beschreibe man Kreise, ziehe in D an die Kreise die Tangenten; diese Tangenten treffen die Verlängerungen von BC und AC in zwei Punkten, welche der gesuchten Schnittlinie angehören.

Wenn man auch das Dreieck DAB aufsetzt, so erhält man einen dritten Punkt, der in derselben Geraden liegt.

88.

Eine Halbkugel ist mit ihrem kreisförmigen Rande auf die Eckpunkte eines Dreiecks ABC gelegt. Welches Stück wird von einer im Punkte D der Dreiecksfläche errichteten Senkrechten durch die Halbkugel abgeschnitten?

Vorbereitung. Ist O Mittelpunkt des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, so ist O auch Mittelpunkt der Halbkugel.

Lösung. Man suche den Mittelpunkt O des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, ziehe OD und errichte in D eine Senkrechte zu OD. Trifft dieselbe den umschriebenen Kreis in E, so ist ED die gesuchte Strecke.

Anmerkung. Die im Punkte D zu ABC errichtete Senkrechte treffe die Kugel im Punkte E. Legt man nun im Punkte E an die Kugel eine Tangentialebene, so schneidet dieselbe die Ebene ABC in einer bestimmten Geraden d. Umgekehrt entspricht jeder nicht durch die Kreisfläche gehenden gegebenen Geraden ein bestimmter Punkt D. Man kann nämlich die Aufgabe lösen: Eine Halbkugel ist auf das Dreieck ABC gedeckt. In der Ebene ist die Gerade d gegeben. Man lege durch d eine Ebene, welche die Halbkugel in E berührt, und bestimme den Fufspunkt D des von E auf ABC gefällten Lotes. Punkt D und Gerade d entsprechen sich somit eindeutig. Heifst der Mittelpunkt der Kugel O, und legt man eine Ebene durch O, D, E, so steht diese Ebene zur Schnittgeraden d senkrecht. Denn sie geht längs des Lotes DE und ist darum zu ABC senkrecht, sie geht längs des Lotes OE und steht darum zur Berührungsebene senkrecht. (Aufgabe 62.) Stehen aber zwei Ebenen auf einer dritten senkrecht, so ist auch die Durchschnittskante der ersteren senkrecht zur dritten. Trifft nun OD die Gerade d senkrecht im Punkte F, so ist nach dem Satze vom rechtwinkligen Dreieck $OD \cdot OF = OE^2 = r^2$. Nun ist zwischen D und d eine numerische Beziehung vorhanden, und diese ermöglicht es, auch zu einem Punkte D aufserhalb des Kreises in der Ebene ABC eine zugeordnete Gerade d zu finden und umgekehrt. D ist

der Pol der ihm zugeordneten Polare *d*. Wenn *D* in den Mittelpunkt des Kreises rückt, so wird *E* höchster Punkt der Kugel. Die Berührungsebene wird *ABC* parallel und schneidet sie in einer Geraden, welche mit allen Punkten im Unendlichen liegt, der unendlich fernen Geraden.

Fig. 96.

Nebenstehende Figur enthält *A, B, C, D, O, F, d* als in der Grundebene liegend, gleichsam den Grundriſs zu unserer Aufgabe. *O, E, F, D* gehören der zum Grundriſs senkrechten Ebene, dem Aufriſs, an. In beiden Ebenen erscheint derselbe Kreis, ein Hauptkreis der Kugel. Es ist zweckmäſsig, Grundriſs und Aufriſs (durch Umlegung des letztern) zu einer Figur zu vereinigen.

89.

Man bestimme eine Kugel, welche durch drei gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt.

Vorbereitung. In einer Ebene, derjenigen der drei gegebenen Punkte *A, B, C*, befindet sich auch eine gegebene Gerade, nämlich der Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der Ebene *ABC*. Ferner ist der Neigungswinkel α beider Ebenen bekannt. Aus diesen Stücken müssen wir nun durch Zeichnung den Radius der Berührungskugel und die Lage ihres Mittelpunktes bestimmen. Zu diesem Zwecke legen wir durch den Mittelpunkt und Berührungspunkt eine zu *ABC* senkrechte Ebene. Sie steht auf beiden Ebenen, also auch auf der Durchschnittskante (Aufg. 88) senkrecht. Sie enthält ferner den Mittelpunkt *Q* des um das Dreieck *ABC* beschriebenen Kreises, weil sie senkrecht zu *ABC*, also längs des Lotes *OQ* geht. Mithin ist ihr Schnitt mit der Ebene *ABC* bestimmbar.

Fig. 97.

Lösung. Man beschreibe um das Dreieck *ABC* einen Kreis mit dem Mittelpunkte *Q*, ziehe $QD \perp DM$, wenn *DM* der Durchschnitt der gegebenen Berührungsebene mit der Ebene *ABC* ist. *QD* bestimmt die Schnittpunkte *E, F* mit dem umschriebenen Kreise. Jetzt lege man an *EFD* in *D* den gegebenen Neigungswinkel α an und beschreibe einen Kreis, der durch die

Punkte E, F geht und den freien Schenkel in G berührt. OF ist der gesuchte Kugelradius, und der Mittelpunkt O liegt senkrecht über Q im Abstande OQ.

Beweis. Denkt man sich den Kreis um O samt seiner Tangente DG um DQ gedreht, bis seine Ebene senkrecht zur Ebene des Papiers wird, so ist GDM die gegebene Ebene, welche berührt werden soll. O ist der Mittelpunkt der gesuchten Kugel; denn es ist $OA = OB = OC = OG$ und $OG \perp GDM$, weil $OG \perp GD \perp DM$ ist.

Einschränkung. Im allgemeinen entstehen zwei Lösungen, aber DM darf den Kreis ABC nicht schneiden.

Anmerkung. Man kann die Aufgabe 89 auf mancherlei Arten lösen. Da die Kugel durch die Punkte A, B, C gehen soll, so haben wir für ihren Mittelpunkt eine Gerade als geometrischen Ort. Es ist leicht, den Schnittpunkt dieser Geraden mit der gegebenen Berührungsebene zu bestimmen. So gewinnt man einen Ausgangspunkt für eine Lösung nach der Ähnlichkeitsmethode. Auch durch Rechnung löst man die Aufgabe.

90.

Zu einer Ebene sind zwei Senkrechte, AB, CD, gegeben. Man soll durch die Endpunkte B, D eine Ebene legen, welche mit der gegebenen einen vorgeschriebenen Neigungswinkel α hat.

Vorbereitung. Die Gerade BD trifft die Fufsebene in einem bestimmbaren Punkte der Geraden AC. Also kennen wir einen Punkt der Schnittlinie. Wenn wir von B aus auf die Schnittlinie eine Senkrechte fällen, so entsteht ein Dreieck BAE, welches bestimmbar ist. Die Schnittlinie mufs zu AE senkrecht stehen.

Lösung. Es möge BD die Gerade AC im Punkte G treffen. Wir zeichnen Dreieck BAF, welches bei A rechtwinklig ist und in welchem $\sphericalangle BFA = \alpha$ ist. Jetzt beschreiben wir um A mit AF einen Kreis und ziehen die Tangente GE. Dann ist GE die gesuchte Schnittlinie.

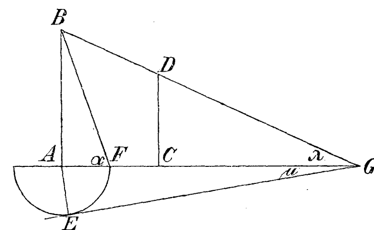


Fig. 98.

Beweis. Richtet man $BADCG$ aus der Ebene der Zeichnung in die senkrechte Lage auf, so wird $BAF \cong BAE$, also $\sphericalangle BEA = \alpha$. $AE \perp EG$, also auch die projizierte Schiefe $BE \perp EG$; mithin ist $\sphericalangle BEA$ Neigungswinkel der Ebene BEG und AEG.

Anmerkung. Man hat $tg\,\alpha = \frac{AB}{AE}$; $sin\,\mu = \frac{AE}{AG}$, $tg\,\lambda = \frac{AB}{AG}$,

also $$tg\,\alpha = \frac{tg\,\lambda}{sin\,\mu}.$$

In der stereometrischen Figur ist $\sphericalangle BGE = \nu$ und

$$cos\,\nu = \frac{EG}{BG},\ cos\,\lambda = \frac{AG}{BG},\ cos\,\mu = \frac{EG}{AG},$$

also $$cos\,\nu = cos\,\lambda\ cos\,\mu.$$

In G ist eine dreiseitige körperliche Ecke entstanden mit den Seiten $\lambda = \alpha$ $\mu = \beta$, $\nu = \gamma$ und den Winkeln A, B, C, von denen A vorhin durch α bezeichnet wurde und $C = 90^0$ ist. Für diese körperliche Ecke mit einem rechten Flächenwinkel haben wir also (wozu Aufgabe 63 zu vergleichen):

$$cos\,\gamma = cos\,\alpha\ cos\,\beta\,;\ tg\,A = \frac{tg\,\alpha}{sin\,\beta}.$$

91.

Jemand geht von dem Punkte A der als Kugel betrachteten Erde in östlicher Richtung aus. Wohin gelangt er auf geradem Wege, wenn er a km zurücklegt?

Vorbereitung. Wenn jemand auf einer Kugelfläche in „gerader" Richtung sich fortbewegt, so ist seine Bahn ein Hauptkreis. Hat er nun a km zurückgelegt, so ist der Winkel im Erdmittelpunkt O bestimmbar, den die Radien AO und CO bilden, wenn C den Endpunkt des zurückgelegten Weges bezeichnet. Nennen wir nun den Nordpol der Erdkugel B, so kennen wir auch den Winkel $BOA = 90^0 - \varphi$, wenn φ die geographische Breite des Ortes A bedeutet. Jetzt ist im Erdmittelpunkt eine dreiseitige Ecke entstanden mit den Seiten

$$BOA = \alpha = 90^0 - \varphi;\ AOC = \beta, \text{ bestimmt durch } a;$$

aufserdem ist der Flächenwinkel C an der Kante AO ein rechter.

Lösung. Es ist nach Aufgabe 90:

$$cos\gamma = cos\alpha \cdot cos\beta = sin\varphi \cdot cos\beta.$$

Hierdurch bestimmt sich $\sphericalangle BOC = \gamma$, also der Abstand des Punktes C vom Nordpol. Die geographische Breite des Punktes C ist also $90^0 - \gamma$. Ferner ist $tg\,B = \frac{tg\,\beta}{sin\,\alpha} = \frac{tg\,\beta}{cos\,\varphi}$. Hierdurch bestimmt man $\sphericalangle B$, und indem man $\sphericalangle B$ zur östlichen Länge vom Orte A addiert, findet man auch die östliche Länge des Punktes C.

Anmerkung. Auf der Erdkugel erhält man ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck ABC.

92.

Auf der Erdkugel sind die beiden Punkte A, B durch ihre geographischen Längen ω_0, ω_1 und durch ihre geographischen Breiten φ, ψ gegeben. Wie grofs ist der kürzeste Abstand AB auf der Kugelfläche gemessen?

Lösung. Der kürzeste Abstand, gemessen auf der Kugelfläche, ist ein Hauptkreis. Dies wird genau so aus dem Satze (Aufgabe 63) über die Summe zweier Seiten im Verhältnis zur dritten abgeleitet, wie in der Planimetrie bewiesen wird, dafs die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. Nennen wir den Mittelpunkt der Kugel O, den Nordpol C, so ist im Mittelpunkte eine dreiseitige Ecke entstanden mit den Seiten:

$\alpha = COA = 90^0 - \varphi$; $\beta = COB = 90^0 - \psi$; γ, gesucht, $= AOB$.

Dreht man die Meridianebene COA, bis sie in die Lage COB gelangt, um die Axe CO, so hat sie dabei den Winkel $\omega_1 - \omega_0$, den Flächenwinkel an der Kante CO, zu durchlaufen, den wir mit C bezeichnen. Also wird

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos C$$

oder

$$\cos\gamma = \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos(\omega_1 - \omega_0).$$

93.

Ein senkrecht stehender Stab wirft an einem bestimmten Tage an einem bestimmten Orte der Erdoberfläche einen Schatten von gegebener Länge. Man bestimme die wahre Zeit.

Die Sonne beschreibt am Himmel täglich einen Kreis, wie es scheinen könnte. Schon eine geringe Überlegung zeigt aber, dafs dies nicht der Fall ist. Denn am 2. Mai steht die Sonne im wahren Mittage etwas höher als am 1. Mai. Die scheinbare Bahn des Sonnenmittelpunktes am Himmel ist also eine Schraubenlinie. Ein Beobachter im Mittelpunkte der Erde würde Nordpol, Südpol, Äquator, Wendekreise u. s. w. der Erde auf die Himmelskugel übertragen und nun die Sonnenbahn erblicken, wie sie am 21. Dezember den Wendekreis des Steinbocks berührt, am 20. März den Äquator kreuzt und am 21. Juni den Wendekreis des Krebses erreicht. Der Abstand der Sonne vom Weltpol ist also an jedem Tage ein anderer und wird durch Tafeln, die Deklinationstafeln, angegeben. Sie zeigen an, wieviel Grad, δ, sich der Sonnen-

mittelpunkt vom Äquator an dem betreffenden Tage in nördlicher Richtung entfernt. Betrachten wir nun das Kugeldreieck, gebildet von den drei Punkten: Zenith, Weltpol, Sonnenmittelpunkt, und bezeichnen wir sie durch Z, W, S. — Dann ist $WS = 90^0 - \delta$, wie wir soeben gesehen haben; ZW wird bekannt durch die geographische Breite des Ortes und ist nach voriger Aufgabe gleich $90^0 - \varphi$, da ZW dem Winkel im Erdmittelpunkt $ZOW = AOW$ gleichkommt, wenn O der Erdmittelpunkt und A der Beobachtungsort ist. ZS endlich bestimmt man durch die Beobachtung der Schattenlänge. Wir setzen $ZS = 90^0 - h$, wo h, die Sonnenhöhe, durch $tg\, h = \frac{l}{s}$ bestimmt wird (l Länge des Stabes, s Länge des Schattens). Die Zeit folgt nun aus der Berechnung des Winkels $t = SWZ$. Denn scheinbar dreht sich der Schenkel WS in 24 Stunden einmal herum, und wenn WS mit WZ der Richtung nach zusammenfällt, dann hat der Ort A wahren Mittag. Wenn wir also t berechnen und aus dem Gradmafs in Zeit umrechnen, so finden wir, wie weit der betreffende Augenblick vom wahren Mittag abliegt. Es ist

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}.$$

Auch der Winkel WZS unseres Dreiecks ist von Wichtigkeit. Er giebt an, wie weit die Sonne, am Horizont gemessen, vom Nordpunkte abweicht; er bestimmt das Azimut der Sonne. — Für $h = 0$ erhält man den Aufgang der Sonne. Doch mufs dabei an die Strahlenbrechung erinnert werden.

94.

Ein schiefer Kegel mit kreisförmiger Grundfläche ist gegeben. In einem bestimmten Punkte des Kreises ist die Tangente gezogen. Man bestimme den Winkel, den die Seite des Kegels mit der Tangente bildet.

Erste Lösung. C sei die Spitze des Kegels, F der Fufspunkt der von C auf die Grundfläche gefällten Senkrechten, A ein gegebener Punkt des Grundkreises mit der Tangente AB. Wir zeichnen die rechtwinkligen Dreiecke CFA und CFB, wodurch CA und CB bekannt werden. Dann zeichnen wir Dreieck CAB und finden so den gesuchten Winkel. AB ist von willkürlicher Gröfse.

Zweite Lösung. Fällt man von F auf die Tangente eine Senkrechte, so erhält man in dem Fufspunkte der Senkrechten einen besonders geeigneten Punkt B.

95.

Man bestimme den Schwerpunkt eines Kreissegments.

Zunächst ist klar, dafs der Schwerpunkt auf derjenigen Linie liegt, welche zur Sehnenmitte senkrecht steht. Zur weiteren Bestimmung lassen wir das Segment um den Durchmesser, welcher der Sehne parallel ist, rotieren und bestimmen den Inhalt des Umdrehungskörpers. Dann liefert Guldins Satz die gesuchte Bestimmung.

Der Kreisradius sei r, die Sehne des Segmentes sei $2a$. Dann ist der Abstand der Sehne von der Umdrehungsaxe

$$\varrho = \sqrt{r^2 - a^2},$$

der Rotationskörper ist also gleich der Kugel vermindert um den Inhalt des Cylinders mit der Höhe $2a$ und dem Grundkreisradius ϱ, vermindert ferner um den Inhalt zweier gleichen Kugelabschnitte mit der Höhe $r - a$, also mit dem Gesamtinhalte

$$2\pi r(r-a)^2 - \tfrac{2}{3}\pi(r-a)^3.$$

Folglich ist der Inhalt des Rotationskörpers

$$\triangle = \frac{4r^3\pi}{3} - 2(r^2 - a^2)a\pi - 2r(r^2 - 2ar + a^2)\pi$$
$$+ \tfrac{2}{3}(r^3 - 3r^2a + 3ra^2 - a^3)\pi,$$

$$\triangle = \tfrac{4}{3}a^3\pi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nach Guldins Satz haben wir nun, wenn der Schwerpunkt vom Mittelpunkt des Kreises den Abstand s hat, die Gleichung:

$$\tfrac{4}{3}a^3\pi = 2s\pi \cdot I,$$

wo I den Inhalt des Segments bedeutet. Also wird

$$s = \frac{2a^3}{3I}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Gleichung (1) läfst sich auch in Worte fassen und heifst dann: Wenn man eine Kugel cylindrisch und central durchbohrt, so ist der übrigbleibende Ring einer koncentrischen Kugel an Inhalt gleich, welche die beiden ebenen Flächen des herausgebohrten Cylinders berührt.

Eine ähnliche Aufgabe kann man bezüglich kegelförmiger Durchbohrung lösen.

96.

Über einem Parallelogramm als Grundfläche steht eine Pyramide, deren Höhenfufspunkt der Schnittpunkt der Diagonalen ist. Wann kann man um, wann in die Pyramide eine Kugel beschreiben?

Als notwendige Bedingung (Aufgabe 16) erkennt man für eine umschriebene Kugel sofort, dafs das Parallelogramm ein Kreisviereck, also ein Rechteck sein mufs. Aber diese Bedingung ist auch genügend. Denn jeder Punkt der Höhe hat in diesem Falle von den vier Eckpunkten der Grundfläche gleichen Abstand. Beschreibt man also denjenigen Kreis, der dem aus zwei Gegenecken des Rechtecks und der Spitze gebildeten Dreiecke umgeschrieben ist, so hat man Mittelpunkt und Radius einer der vierseitigen Pyramide umschriebenen Kugel.

Bezüglich der zweiten Aufgabe ziehen wir $FG \parallel AB$, dann ist $FG \parallel DC$. Denn wenn zwei Linien einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel. Daher gehört FG den Ebenen AEB und DEC an, ist also deren Durchschnitt. Fällen wir nun von E auf DC und auf AB Senkrechte, so stehen beide zu FG senkrecht, bilden also den Neigungswinkel der Ebenen AEB und DEC. EO ist nun auch senkrecht FG, weil $EO \perp ABCD \parallel FG$. Daher erhalten wir in E drei Senkrechte zu FG. Dieselben liegen in einer Ebene; denn wenn drei Gerade in einem Punkte zu einer vierten Geraden senkrecht stehen, so liegen die drei Geraden in einer Ebene. EO halbiert aber den Winkel der beiden anderen, wie die Kongruenz der betreffenden Dreiecke zeigt. Folglich halbiert die Ebene FGO den Winkel der beiden Ebenen AEB und DEC, sie enthält daher den Mittelpunkt der Berührungskugel, falls eine solche vorhanden ist. — Legt man nun durch E eine Parallele zu BC, so kann man dieselben Schlüsse ziehen und findet mithin, dafs EO den Mittelpunkt der Berührungskugel enthält. Zwei Hauptkreise der Kugel berühren also die Seiten der gleichschenkligen Dreiecke, welche durch Ebenen aus der Pyramide heraus-

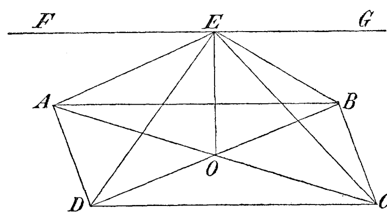


Fig. 99.

geschnitten werden, die längs EO gehen und senkrecht zu den Gegenseiten der Grundfläche sind. Da diese beiden gleichschenkligen Dreiecke in der gemeinsamen Höhe EO und dem Radius des eingeschriebenen Kreises übereinstimmen, so sind sie kongruent. Folglich mufs unser Parallelogramm ein solches sein, bei dem die Gegenseiten gleichen Abstand voneinander haben, also ein Rhombus. — Diese Bedingung ist notwendig, aber auch genügend. Denn in einen Rhombus läfst sich ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Diagonalen ist. Verbindet man zwei diametral gegenüberliegende Berührungspunkte mit E und dreht das so entstehende gleichschenklige Dreieck um EO als Axe herum, so erzeugt der eingeschriebene Kreis dieses Dreiecks eine Kugel, welche der Pyramide eingeschrieben ist.

97.

In einer Ebene ist eine Strecke AB und ein Punkt C gegeben. Man bestimme auf der zur Ebene in C errichteten Senkrechten einen Punkt D derartig, dafs $\measuredangle ADB$ eine vorgeschriebene Gröfse δ erhält.

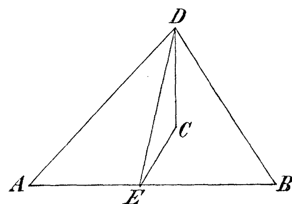


Fig. 100.

Vorbereitung. Vom Dreiecke ADB ist Grundlinie und Winkel an der Spitze bekannt. Zieht man $CE \perp AB$, so wird auch $DE \perp AB$. Man kennt also auch den Höhenfufspunkt.

Lösung. Man ziehe $CE \perp AB$, beschreibe über AB einen des Winkels δ fähigen Bogen und verlängere CE, bis es diesen Bogen trifft, dann hat man das Dreieck ADB gewonnen. DC finden wir durch das rechtwinklige Dreieck DCE, dessen Hypotenuse DE und dessen eine Kathete CE wir kennen.

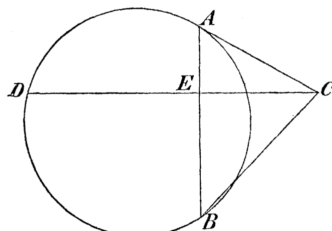


Fig. 101.

Einschränkung. Es mufs sein:

$$DE \gtreqless CE.$$

98.

In einer Ebene ist eine Gerade gegeben; ferner ist eine Schiefe zur Ebene gegeben, und es soll zur Schiefen eine Parallele im Abstande r gezogen werden, welche die in der Ebene gegebene Gerade schneidet.

Vorbereitung. Die Ebenen DBC und ABC (Fig. 102) mögen sich in BC schneiden; es sei $BD \perp BC$, $BA \perp BC$. Dann ist $\sphericalangle DBA = \alpha$ der Neigungswinkel beider Ebenen. Zieht man nun $FE \parallel BD$, so wird $BG = \frac{EB}{\sin\alpha}$.

Durch diese Zeichnung und Rechnung ist es ermöglicht, die Punkte der Ebenen EBC und GBC eindeutig aufeinander zu beziehen. Jedem Punkte E der Ebene EBC entspricht ein bestimmter Punkt G der Ebene GBC und umgekehrt. Dreht man nun EBC um BC herum, bis sie in die Ebene GBC gelangt, so erscheint E auf der von G auf BC gefällten Senkrechten, aber nach Verkürzung dieser Senkrechten im Verhältnisse $1 : \sin\alpha$. So erscheint die Ebene in sich selbst abgebildet. Jedem Punkte der Geraden BC entspricht dieser Punkt selbst. Jede andere Gerade wird bei der Abbildung wieder eine Gerade und schneidet sich mit ihrem Bilde auf BC. Wenn wir nun eine Gerade in gleichem Abstande parallel zu BD herumbewegen, so entsteht in der Ebene EBC ein Kreis mit dem Mittelpunkte B und dem Radius r. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem Bilde der gegebenen Geraden bahnen den Weg zur

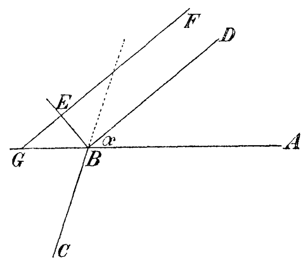


Fig. 102.

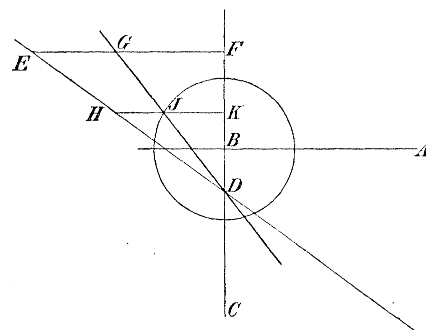


Fig. 103.

Lösung. BA (Fig. 103) sei die Projektion der gegebenen Schiefen, B ihr Fufspunkt. Wir ziehen $BC \perp BA$, dann ist, wenn $FG : FE = \sin\alpha : 1$, DG das Bild der Geraden DE, welche in unserer Ebene gegeben ist. Es ist $FE \perp BF$. Trifft nun der um B mit r beschriebene Kreis DG in J, und ist $JK \perp BF$, so ist H derjenige Punkt, den wir suchen.

Beweis. Dreht man $GJDF$ (Fig. 103) um BC, bis diese Ebene zu der gegebenen Schiefen senkrecht wird, also um den Winkel $90^0 - \alpha$, so trifft die von E auf die gedrehte Ebene gefällte Senkrechte den Punkt G, da $GF : EF = \sin\alpha$ ist. Ebenso trifft die von H auf die gedrehte Ebene gefällte Senkrechte den Punkt J, weil $JK : HK = FG : FE$ ist. Also ist diese Senkrechte parallel zur gegebenen Schiefen und hat von derselben den Abstand r, weil $BJ = r$.

Einschränkung. Der um B mit r beschriebene Kreis mufs DG treffen. Im allgemeinen erhält man zwei Auflösungen.

Anmerkung. Das Bild des Kreises der Ebene BEC (Fig. 102) in der Ebene BGC ist eine Ellipse. Es kommt dies auf die Behauptung hinaus, dafs der Schnitt eines Cylinders durch eine Ebene im allgemeinen eine Ellipse ist. Man beweist diesen Satz aus der Brennpunktseigenschaft dadurch, dafs man in den Cylinder zwei Kugeln mit gleichem Radius wie der des Cylinders hineinrollt, und zwar so, dafs die Kugeln die schneidende Ebene berühren. Übrigens folgt der Satz auch leicht aus Aufgabe 49, Fig. 63 durch Betrachtung unserer ähnlichen Abbildung. Leicht kann man aus diesen Anschauungen folgern, dafs der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbaxen a, b gleich $ab\pi$ ist. Eine andere eindeutige Beziehung zwischen den Punkten zweier Ebenen findet man dadurch, dafs man durch einen aufserhalb der Ebenen liegenden Punkt Gerade zieht und die Schnittpunkte mit den beiden Ebenen als entsprechende Punkte auffafst. Bewegt sich die schneidende Gerade so, dafs sie eine dritte Ebene beschreibt, so entstehen in den zwei aufeinander bezogenen Ebenen Gerade, welche sich punktweise entsprechen. So entspricht also jedem Punkte ein Punkt, jeder Geraden eine Gerade, jedem Punkte der Durchschnittskante dieser Punkt selbst. Aber dem Kreise entspricht nicht jedesmal ein Kreis, sondern im allgemeinen der Schnitt eines geraden Kegels mit einer Ebene, ein Kegelschnitt. Nach Schellbach kann man sich von diesen Kurven durch Betrachtung des Schattens einer auf einer Ebene ruhenden Kugel eine sehr deutliche Vorstellung machen. Hat der leuchtende Punkt von der Ebene einen gröfsern Abstand, als der Durchmesser der Kugel beträgt, so wird der Schatten eine Ellipse. Ist seine Entfernung von der Ebene dem Durchmesser gleich, so erscheint eine Parabel. Befindet sich der leuchtende Punkt tiefer als der Durchmesser der Kugel, so fällt der Schatten in Form einer Hyperbel auf die Ebene. Die Beweise gelingen aus den Brennpunktseigenschaften dadurch, dafs man in den geschnittenen Kegel diejenigen zwei Berührungskugeln hineinrollt, welche die schneidende Ebene berühren.

99.

Eine Halbkugel soll durch eine der ebenen Begrenzungsfläche parallele Ebene in einem vorgeschriebenen Verhältnisse geteilt werden.

Lösung. Wenn man den Schnitt im Abstande x zur Grundfläche parallel hindurchführt, so ist der Inhalt der abgeschnittenen Kugelzone (nicht derjenige der Kappe, Aufgabe 95):

$$r^2 x \pi - \frac{1}{3} x^3 \pi = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 r^3}{3} \pi,$$

also $$x^3 - 3 r^2 x = -\frac{2}{n} r^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nun besteht aber die Gleichung:

$$\cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha = \frac{1}{4} \cos (3 \alpha). \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzt man also $x = 2 r \cos \alpha$, so wird aus (1)

$$\cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha = -\frac{1}{4 n} = \frac{1}{4} \cos (3 \alpha), \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\cos (3 \alpha) = -\frac{1}{n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, denjenigen Winkel, dessen *cosinus* den Wert $-\frac{1}{n}$ hat, in drei gleiche Teile zu teilen. Sie ist also im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal lösbar. Schon Archimedes hat sich mit dieser Kugelteilung beschäftigt. Für $n = 2$ wird $\cos(3\alpha) = -\frac{1}{2}$, also $3\alpha = 120^0, 240^0, 480^0$; $\alpha = 40^0$ $80^0, 160^0$. Nur $\alpha = 80^0$ entspricht dem Wortlaute der Aufgabe. (Vgl. des Verf. Mathem. Miscellen, Coesfelder Jahresbericht 1881.)

100.

Der eine Schenkel eines gegebenen Winkels α ist einer gegebenen Ebene parallel. Der andere Schenkel ist drehbar. Man bestimme die Gleichung der Kurve, in welcher er die Ebene trifft.

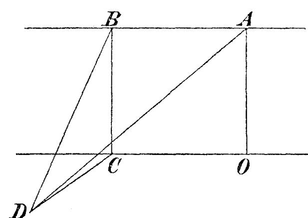


Fig. 104.

Lösung. AB sei der feste Schenkel, OC seine Projektion in der Ebene, A der Scheitel des Winkels $BAD = \alpha$. Sei ferner $DC \perp OC$, $BC \perp OC$, also Ebene $BCD \perp CO$ und darum auch $BCD \perp AB$, $BD \perp AB$; endlich $AO = h$, $OC = x$, $DC = y$.

Dann ist $$tg\,\alpha = \frac{BD}{AB}, \quad tg^2 \alpha = \frac{y^2 + h^2}{x^2}.$$

Also wird $$x^2 tg\,\alpha^2 - y^2 = h^2.$$

Führen wir nun für h die Bezeichnung b ein und setzen $tg\,\alpha = \frac{b}{a}$, so wird $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, welche wir Aufgabe 49 ganz anders abgeleitet haben. Wird AD der Ebene parallel, so rückt D ins Unendliche; wir haben die Asymptote vor uns. Über den weitern Verlauf giebt unsere Aufgabe sehr deutlich Aufschlufs. Denken wir an den Kugelschatten, so liegt der leuchtende Punkt diesesmal in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte der Kugel.

Anhang.

Die imaginären Gröfsen. Einige Reihen.

Man bezeichnet die eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ durch $x = i$. Dann ist die andere Lösung $x = -i$. Da $x^2 + 1 = 0$, so ist $x^3 = -x$, $x^4 = 1$, und allgemein:

$$i^{4n+\alpha} = i^\alpha \text{ für } \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Man hat also $\qquad i^2 = -1,\ i^3 = -i.$

Die Gröfse $a + bi$, wo a und b reelle Zahlen bedeuten, nennt man eine komplexe Gröfse.

Lehrsatz. Sind zwei komplexe Gröfsen einander gleich, so ist der reelle Teil gleich dem reellen und der imaginäre Teil gleich dem imaginären.

Beweis. Aus der Annahme $a + bi = c + di$ folgt

$$a - c = (d - b)i,$$

$$(a - c)^2 = -(d - b)^2;\ (a - c)^2 + (d - b)^2 = 0.$$

$a - c$ und $d - b$ sind nun, wenn sie von Null verschieden sein sollen, entweder positiv oder negativ, ihr Quadrat aber ist unter allen Umständen positiv. Also kann niemals die letzte Gleichung richtig sein. Es müssen also $a - c$ und $d - b$ beide verschwinden, w. z. b. w.

Man nennt $a - bi$ die zu $a + bi$ konjugierte Gröfse. Jeder Bruch kann durch Umformung die Form $a + bi$ annehmen. Denn es ist $\frac{m + ni}{r + si} = \frac{(m + ni)(r - si)}{r^2 + s^2} = \frac{mr + ns}{r^2 + s^2} + \frac{nr - sm}{r^2 + s^2}i.$

$a^2 + b^2$ wird die Norm der Gröfse $a + bi$ genannt, ihre Quadratwurzel, positiv genommen, heifst absoluter Betrag der komplexen Gröfse.

Aufgabe. Man löse die Gleichung $x^2 = a + bi$.

Diese Aufgabe hat den Sinn, auf dem Gebiete der komplexen Zahlen eine solche $y + zi$ aufzufinden, daſs sie quadriert den Wert $a + bi$ ergiebt. Man findet $y^2 - z^2 = a$, $2yz = b$; also

$$(y^2 + z^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Daraus folgt:

$$2y^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2z^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wir müssen der Wurzel das positive Vorzeichen erteilen, denn $y^2 + z^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist eine positive Gröſse. Für y und z erhält man nun je zwei Werte, also dem Anscheine nach vier Paare. Aber zwei dieser Paare sind nach Maſsgabe der Gleichung $2yz = b$ zu verwerfen. Folglich liefert unsere Gleichung zweiten Grades zwei Auflösungen, wie es sein muſs.

Aufgabe. Man bringe die komplexe Gröſse $a + bi$ auf die kanonische Form. Diese Form wird erteilt durch Bestimmung der Gröſsen ϱ und φ aus

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a + bi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man findet durch Anwendung unseres Satzes:

$$\varrho\cos\varphi = a, \quad \varrho\sin\varphi = b, \quad \varrho = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad . \quad (2)$$

ϱ nehmen wir immer als positiv an. Dann ist durch die Vorzeichen von a und b unzweideutig über den Quadranten entschieden, in welchem φ liegt. Ist z. B. a eine negative, b eine positive Zahl, so ist $\cos\varphi$ negativ, $\sin\varphi$ positiv, also liegt φ im zweiten Quadranten. Der Wert von φ kann aus einer der beiden ersten Gleichungen (2) entnommen werden.

Lehrsatz des Moivre (spr. Meuwr):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad . \quad . \quad (3)$$

Man zeigt zunächst durch Ausrechnung die Richtigkeit der Gleichung:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta).$$

Dann führt man den Beweis, indem man $\beta = \alpha$ nimmt, für $n = 2$; hierauf durch die Annahmen 2α statt α, α statt β für $n = 3$ u. s. w., endlich allgemein durch vollständige Induktion.

Aufgabe. Man löse die Gleichung

$$x^n = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wir setzen $x = \cos\varphi + i\sin\varphi$, dann wird $\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = 1$, also

$$\cos n\varphi = 1, \quad \sin n\varphi = 0.$$

Beiden Gleichungen wird genügt durch die Annahme für m als ganze Zahl

$$\varphi = m \cdot \frac{360}{n};$$

also erhält man durch $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ im ganzen n Lösungen. Mehr sind nicht vorhanden, da für $m_1 = n + m$ dasselbe x herauskommt wie für m. Es ist also die Lösung von (4)

$$x = cos\left(m \cdot \frac{360^0}{n}\right) + i\, sin\left(m \cdot \frac{360^0}{n}\right). \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Lösung der Gleichung (4) bedingt also diejenige der Aufgabe, ein regelmäfsiges n-Eck zu zeichnen, und umgekehrt. Gelingt es, die Gleichung (4) lediglich durch Quadratwurzeln zu lösen, so ist es möglich, ein regelmäfsiges n-Eck mit Lineal und Zirkel zu zeichnen. Man kann nun (4) zerlegen in

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 0.$$

Ist ein Produkt aber gleich Null, so ist mindestens einer der Faktoren gleich Null, also entweder $x = 1$ oder

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0. \quad . \quad . \quad (6)$$

Für $n = 5$ hat man

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Hieraus folgt durch $y = x + \frac{1}{x}$ die Gleichung

$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Anmerkung. Es ist zweckmäfsig, den Satz über das Verschwinden eines Produkts für die komplexen Gröfsen ausdrücklich zu beweisen. Aus der Annahme $(a + b\,i)(c + d\,i) = 0$ folgt

$$ac - bd = 0, \quad ad + bc = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und daraus

$$abc = b^2 d, \quad abc = -a^2 d, \quad \text{also } (a^2 + b^2)\,d = 0;$$
$$abd = a^2 c, \quad abd = -b^2 c, \quad \text{also } (a^2 + b^2)\,c = 0.$$

Also müssen entweder d und c gleichzeitig verschwinden oder a und b. Und damit ist der Satz bewiesen.

Gehen wir jetzt zur Entwicklung einiger Reihen* über. Man beweist für ganze positive n durch vollständige Induktion den binomischen Lehrsatz:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{1 \cdot 2 \cdots h} x^h + \cdots + x^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ersetzt man hierin x durch $\frac{1}{n}$, n durch nx, so wird

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{1}{1 \cdot 2} x\left(x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

* In einfacher, nicht immer strenger Darstellung.

Also für ein sehr grofses (unendlich grofses) n erhält man

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Nun setzen wir $e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für $n = \infty$

und finden

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \quad \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

Also

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \quad \cdot \quad (10)$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$e = 2{,}718281828459\ \ldots$$

Jetzt setzen wir in Formel (8) für x ein $\frac{x}{y}$ und erhalten

$$(x+y)^n = x^n + n\cdot x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \cdots$$

Daher wird

$$(cos\varphi + i\,sin\varphi)^n = cos^n\varphi + n\,i\cdot cos^{n-1}\varphi\cdot sin\varphi + \cdots$$

Das allgemeine Glied lautet:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h+1)}{1\cdot 2\cdots h}\cdot cos^{n-h}\varphi\cdot sin^h\varphi\cdot i^h.$$

Lassen wir nun $\varphi = \frac{x}{n}$ und n sehr grofs werden, nehmen wir ferner an, der Winkel φ sei im natürlichen Mafs gemessen, so dafs für ein sehr grofses n — man denke etwa an eine Zahl mit 100 Ziffern — gesetzt werden darf

$$cos\frac{x}{n} = 1\,,\quad sin\frac{x}{n} = \frac{x}{n}\,,$$

dann wird das allgemeine Glied:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}\cdot\frac{x^h}{n^h}\cdot i^h\,,$$

also

$$i^h\cdot\frac{x^h}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{h-1}{n}\right)$$

oder, weil n überaus grofs ist,

$$i^h\cdot\frac{x^h}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}.$$

Andrerseits wird $(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^n = cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\,\varphi = cos\,x + i\,sin\,x$, da $n\varphi = x$ gesetzt worden ist. Wir erhalten also durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \cdot \cdot \quad (11)$$

$$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \cdot \cdot \quad (12)$$

Hieraus folgt nun sofort durch Vergleichung mit (9)

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Aus (13) folgen leicht die Bestimmungen:

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{1}{2}\pi i} = i. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Wir müssen uns nur erinnern, dafs x in natürlichem Mafs gemessen ist. Nehmen wir die Zahl e zur Basis eines Logarithmensystems, so erhalten wir die natürlichen Logarithmen. Zur Unterscheidung von den künstlichen Logarithmen mit der Basis 10 schreiben wir lx zur Bezeichnung des natürlichen, $\log x$ zur Bezeichnung des künstlichen Logarithmus. Es ist

$$e^{lx} = x, \quad 10^{\log x} = x, \quad 10^{\log e} = e. \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Also $\quad (10^{\log e})^{lx} = 10^{\log e \cdot lx} = x = 10^{\log x}.$

Daher $\quad \log x = \log e \cdot lx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$

Man findet $\quad \log e = 0{,}4342944819 03 \ldots$

Aus (13) folgt $\quad xi = l(\cos x + i \sin x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$

Man sieht, dafs die Logarithmen komplexer (und negativer) Zahlen imaginär sind. Aber da $e^{2\pi i} = 1$, so kann man mit demselben Rechte wie (18) behaupten:

$$xi + 2\pi i = l(\cos x + i \sin x).$$

Die Logarithmen sind nicht eindeutige, sondern unendlich vieldeutige Funktionen. Es ist ferner

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = x + \frac{n-1}{2} x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

Andrerseits ist

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = \frac{e^{n\,l(1+x)} - 1}{n} = l(1+x) + \frac{n \cdot l^2(1+x)}{2!} + \cdots$$

Daher ist

$$l(1+x) + \frac{n \cdot l^2(1+x)}{2!} + \frac{n^2 \cdot l^3(1+x)}{3!} + \cdots = x + \frac{n-1}{2!} x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Hieraus folgt für $n = 0$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad . \quad (20)$$

Für $-x$ statt x findet man sofort

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$